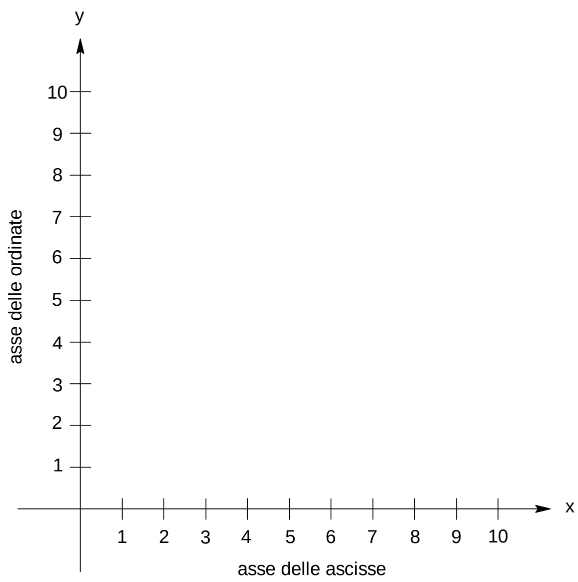
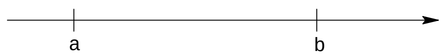
# Il piano cartesiano

Per la rappresentazione di grafici su di un piano si utilizza un *sistema di riferimento cartesiano*.
Su questo piano si rappresentano *due rette orientate* (con delle frecce all'estremità positiva) e disposte perpendicolarmente tra loro: queste rette vengono definite *assi cartesiani*.
L'asse disposto in orizzontale è detto *asse delle ics* (x) o *asse della ascisse*.
L'asse disposto in verticale è detto *asse delle ipsilon* (y) o *asse delle ordinate*.



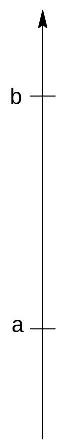

Sull'asse delle ascisse, un punto identifica un numero (e viceversa).
Un *punto b* che sta alla destra di un altro *punto a*, permette di dire che:

a < b (*a è minore di b*), oppure b > a (*b maggiore di a*).

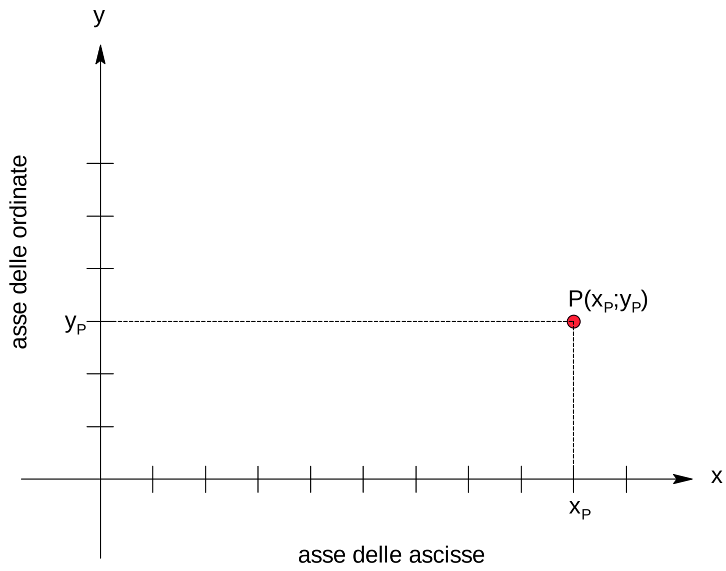



Sull'asse delle ordinate, un punto identifica un numero (e viceversa).
Un *punto b* che sta al di sopra di un altro *punto a*, permette di dire che:

a < b (*a è minore di b*), oppure b > a (*b maggiore di a*).



Il punto di intersezione dei due assi cartesiani è detto *origine* di coordinate *O(0;0)*.




Nel piano cartesiano, un *punto P* generico è individuato da *due coordinate*: la prima è l'*ascissa* $x_P$ e la seconda è l'*ordinata* $y_P$.
Per definire questa condizione, si descrive la *posizione del punto P* come $P(x_P;y_P)$.

## Il grafico di una retta

Quando si traccia il grafico di una retta nel piano cartesiano, è necessario valutare:

- la *pendenza della retta*, detta anche *coefficiente angolare* (simbolo: *m*);
- l'*intercetta della retta sull'asse delle ordinate* (simbolo: *q*);
- l'*intercetta della retta sull'asse delle ascisse*.

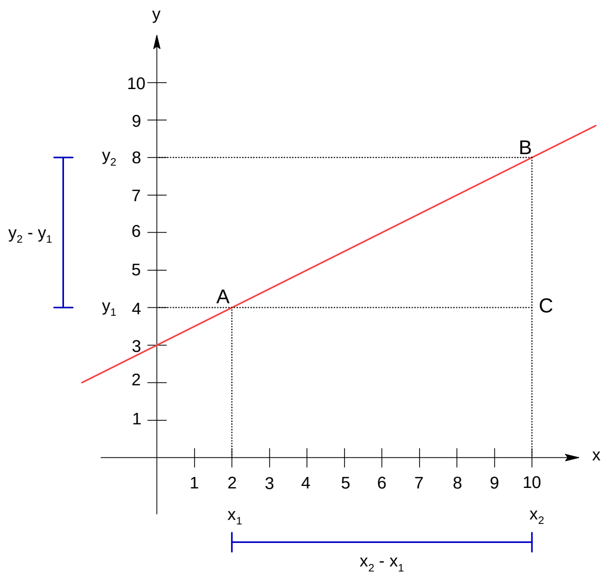
La formula della nostra retta è:

$$y = mx + q$$

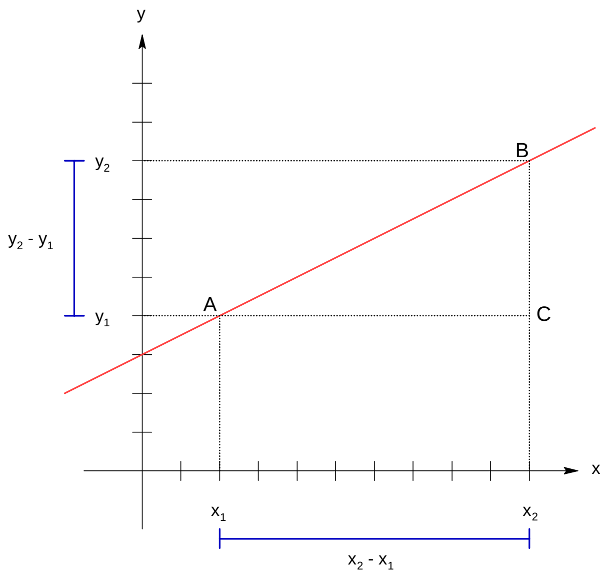
Il *coefficiente angolare* (o *pendenza*) di una retta si calcola con la seguente formula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

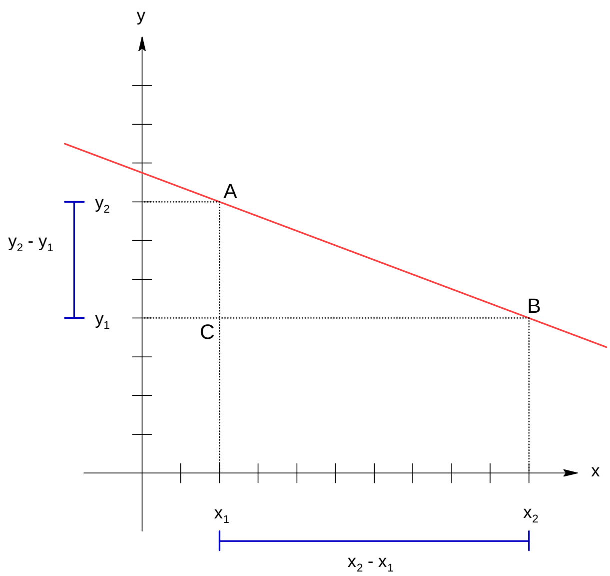
In ogni caso, si ha che: $x_2 > x_1$ e quindi $x_2 - x_1 > 0$.
Pertanto questa differenza fornisce sempre un numero positivo. Ed è da notare che, poiché noi tracciamo generalmente una retta da sinistra verso destra, questo è il *denominatore positivo* della frazione precedente che ci permette di calcolare *m*.



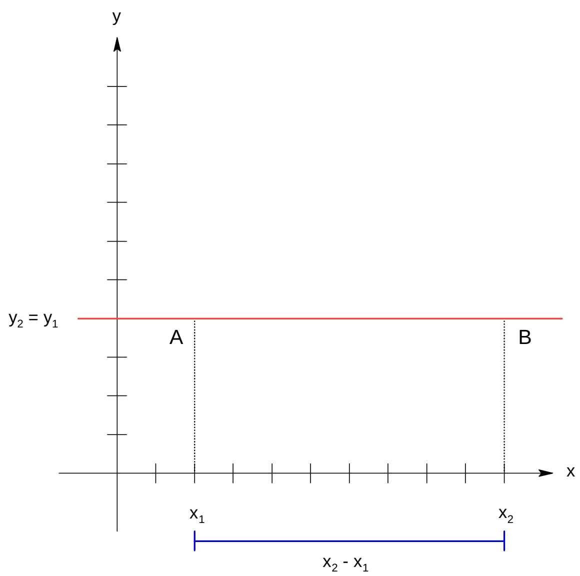
**Retta con pendenza positiva** (*m > 0*)
Poiché $y_2 > y_1$, si deduce che $y_2 - y_1 > 0$.
Quindi la differenza fornisce sempre un *numero positivo*.
Sapendo che numeratore e denominatore sono entrambi positivi, la conclusione è che il coefficiente angolare *m* della retta è *positivo*.
*La retta con pendenza positiva viene tracciata da basso-sinistra verso alto-destra.*




**Retta con pendenza negativa** (*m < 0*)
Poiché $y_2 < y_1$, si deduce che $y_2 - y_1 < 0$.
Quindi la differenza fornisce sempre un *numero negativo*.
Sapendo che il numeratore è negativo ed il denominatore è positivo, la conclusione è che il coefficiente angolare *m* della retta è *negativo*.
*La retta con pendenza negativa viene tracciata da alto-sinistra verso basso-destra.*



**Retta con pendenza nulla** (*m = 0*)
Poiché $y_2 = y_1$, si deduce che $y_2 - y_1 = 0$.
Quindi la differenza fornisce sempre un *numero nullo* (*zero*).
Sapendo che il numeratore è zero ed il denominatore è positivo, la conclusione è che il coefficiente angolare *m* della retta è uguale a *zero*.
*La retta con pendenza nulla è orizzontale e viene tracciata da sinistra verso destra, parallela all'asse delle ascisse.*

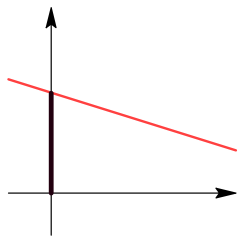
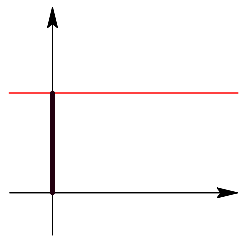
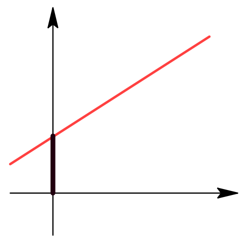
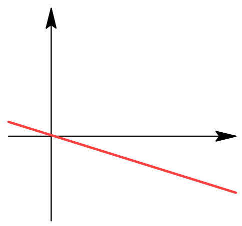
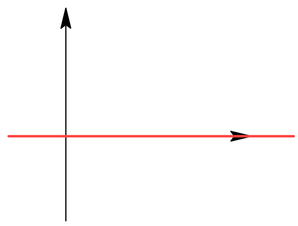
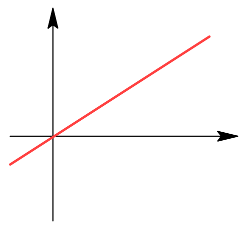
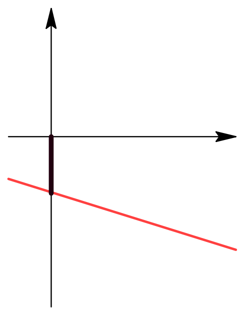
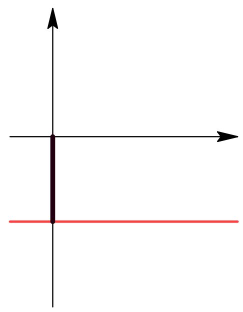
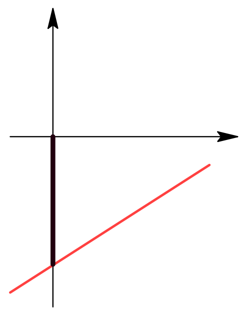



**Intercetta** ***q*** **della retta sull'asse delle ordinate**
Se *q > 0* (*q positivo*), la retta intercetta l'asse delle ordinate al di sopra dell'origine *O(0;0)*.
Se *q = 0* (*q nullo*), la retta intercetta l'asse delle ordinate nell'origine *O(0;0)*.
Se *q < 0* (*q negativo*), la retta intercetta l'asse delle ordinate al di sotto dell'origine *O(0;0)*.

**Caso particolare**
*Se m = 0 (coefficiente angolare m nullo) e q = 0 (q nullo), la retta coincide con l'asse delle ascisse e passa per l'origine O(0;0).*

# Tabella riassuntiva sulle giaciture della retta

# non parallela all’asse delle ordinate (y)

| | m < 0 | m = 0 | m > 0 |
|---|---|---|---|
| q > 0 |  |  |  |
| q = 0 |  |  |  |
| q < 0 |  |  |  |

## Dalla retta $y = mx + q$ al grafico corrispondente

**Esempio n. 1**
Sia data la retta: $y = \frac{3}{2}x + 2$. Tracciare il grafico corrispondente.

**Risoluzione**
L'intercetta della retta sull'asse delle ordinate è $q = 2$.
Si partirà quindi dal punto A (0; 2) per tracciare la retta.
Poiché il coefficiente angolare è $m = \frac{3}{2} > 0$, la retta sarà tracciata da basso-sinistra verso alto-destra. Questo perché $x_2 - x_1 = 2 > 0$ e $y_2 - y_1 = 3 > 0$.
Dal punto A (0; 2) ci si sposterà di 2 unità in orizzontale, verso destra, e di 3 unità in verticale, dal basso verso l'alto.
Ci si ritrova così a determinare la posizione del punto B (2; 5).
Sapendo che per due punti passa una ed una sola retta, quella cercata è la retta che passa per i punti A (0; 2) e B (2; 5).

**Esempio n. 2**
Sia data la retta: $y = -\frac{5}{3}x + 8$. Tracciare il grafico corrispondente.

**Risoluzione**
L'intercetta della retta sull'asse delle ordinate è $q = 8$.
Si partirà quindi dal punto A (0; 8) per tracciare la retta.
Poiché il coefficiente angolare è $m = -\frac{5}{3} < 0$, la retta sarà tracciata da alto-sinistra verso basso-destra. Questo perché $x_2 - x_1 = 3 > 0$ e $y_2 - y_1 = -5 < 0$.
Dal punto A (0; 8) ci si sposterà di 3 unità in orizzontale, verso destra, e di 5 unità in verticale, dall'alto verso il basso.
Ci si ritrova così a determinare la posizione del punto B (3; 3).
Sapendo che per due punti passa una ed una sola retta, quella cercata è la retta che passa per i punti A (0; 8) e B (3; 3).

**Esempio n. 3**
Sia data la retta: $y = -3x + 1$. Tracciare il grafico corrispondente.

**Risoluzione**
L'intercetta della retta sull'asse delle ordinate è $q = 1$.
Si partirà quindi dal punto A (0; 1) per tracciare la retta.
Poiché il coefficiente angolare è $m = -3 < 0$, la retta sarà tracciata da alto-sinistra verso basso-destra. Questo perché $x_2 - x_1 = 1 > 0$ e $y_2 - y_1 = -3 < 0$.
Dal punto A (0; 1) ci si sposterà di 1 unità in orizzontale, verso destra, e di 3 unità in verticale, dall'alto verso il basso.
Ci si ritrova così a determinare la posizione del punto B (1; -2).
Sapendo che per due punti passa una ed una sola retta, quella cercata è la retta che passa per i punti A (0; 8) e B (1; -2).

**Esempio n. 4**
Sia data la retta: $y = -x$. Tracciare il grafico corrispondente.

**Risoluzione**
L'intercetta della retta sull'asse delle ordinate è $q = 0$. *La retta passa per l'origine.*
Si partirà quindi dal punto A (0; 0) per tracciare la retta.
Poiché il coefficiente angolare è $m = -1 < 0$, la retta sarà tracciata da alto-sinistra verso basso-destra. Questo perché $x_2 - x_1 = 1 > 0$ e $y_2 - y_1 = -1 < 0$.
Dal punto A (0; 0) ci si sposterà di 1 unità in orizzontale, verso destra, e di 1 unità in verticale, dall'alto verso il basso.
Ci si ritrova così a determinare la posizione del punto B (1; -1).
Sapendo che per due punti passa una ed una sola retta, quella cercata è la retta che passa per i punti A (0; 0) e B (1; -1).
*La retta è la bisettrice del secondo e del quarto quadrante.*

**Esempio n. 5**
Sia data la retta: $y = x$. Tracciare il grafico corrispondente.

**Risoluzione**
L'intercetta della retta sull'asse delle ordinate è $q = 0$. *La retta passa per l'origine.*
Si partirà quindi dal punto A (0; 0) per tracciare la retta.
Poiché il coefficiente angolare è $m = 1 > 0$, la retta sarà tracciata da basso-sinistra verso alto-destra. Questo perché $x_2 - x_1 = 1 > 0$ e $y_2 - y_1 = 1 > 0$.
Dal punto A (0; 0) ci si sposterà di 1 unità in orizzontale, verso destra, e di 1 unità in verticale, dal basso verso l'alto.
Ci si ritrova così a determinare la posizione del punto B (1; 1).
Sapendo che per due punti passa una ed una sola retta, quella cercata è la retta che passa per i punti A (0; 0) e B (1; 1).
*La retta è la bisettrice del primo e del terzo quadrante.*

**Esempio n. 6**
Sia data la retta: $y = -2$. Tracciare il grafico corrispondente.

**Risoluzione**
L'intercetta della retta sull'asse delle ordinate è $q = -2$.
Si partirà quindi dal punto A (0; -2) per tracciare la retta.
Poiché il coefficiente angolare è $m = 0$, *la retta sarà tracciata in orizzontale*, da sinistra verso destra. Questo perché $x_2 - x_1 = 1 > 0$ e $y_2 - y_1 = 0$.
Dal punto A (0; -2) ci si sposterà di alcune unità *n* (a scelta) in orizzontale, verso destra, e di 0 unità in verticale.
Ci si ritrova così a determinare la posizione del punto B (*n*; -2).
Sapendo che per due punti passa una ed una sola retta, quella cercata è la retta che passa per i punti A (0; -2) e B (*n*; -2).

**Retta che passa per due punti *A* $(x_1;y_1)$ e *B*$(x_2;y_2)$**
**(con $x_1 \neq x_2$)**

Per definire la giacitura, cioè il tracciato di questa retta:

- si determina il valore del *coefficiente angolare m*:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- dalla formula generale $y = mx + q$ si ricava la formula per il calcolo di $q$:

$$q = y - mx$$

Per determinare il *valore unico* di $q$ (*intercetta della retta sull'asse delle ordinate*) si calcolano rispettivamente:

$$q_A = y_A - mx_A \quad \text{e poi} \quad q_B = y_B - mx_B$$

e si deve ottenere, necessariamente: $q_A = q_B$.

Inoltre, *tutti i punti che si trovano sull'asse delle ordinate (y) hanno ascissa x = 0.*

Per determinare l'*intercetta sull'asse delle ascisse*, si osservi che:

- *tutti i punti che si trovano sull'asse delle ascisse (x) hanno ordinata y = 0.*
- ponendo $m \neq 0$ si ha, in successione:

$$mx = y - q$$

  e quindi:

$$x = \frac{y - q}{m} = \frac{0 - q}{m} = -\frac{q}{m}$$

**Conclusione (caso particolare)**
Se $m = 0$ e $q \neq 0$, è *impossibile* che la retta $y = mx + q$ incontri l'asse delle ascisse.
Si ricordi che è *impossibile* la divisione di un numero diverso da zero (*numeratore* o *dividendo*) per zero (*denominatore* o *divisore*).

**Esempio n. 1**
Sia data la retta che passa per due punti *A (-1;3)* e *B(2;1).*
Determinare: a) il coefficiente angolare $m$ della retta; b) l'intercetta $q$ della retta sull'asse delle ordinate; c) l'equazione della retta; d) l'intercetta della retta sull'asse delle ascisse.

**Risoluzione**
Il coefficiente angolare *m* della retta è:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{2-(-1)} = -\frac{2}{3}$$

Poiché $m = -\frac{2}{3} < 0$, la retta avrà una pendenza negativa e verrà tracciata da alto-sinistra verso basso-destra.
Data la retta di equazione $y = mx + q$, l'intercetta $q$ sull'asse delle ordinate si ha quando x = 0. La formula per il calcolo di *q* è:

$$q = y - mx$$

Per determinare il *valore unico* di *q* (*intercetta della retta sull'asse delle ordinate*) si calcolano rispettivamente:

$$q_A = y_A - mx_A = 3 - \left(-\frac{2}{3}\right)(-1) = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

e poi

$$q_B = y_B - mx_B = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

e si deve ottenere, necessariamente:

$$q_A = q_B = \frac{7}{3}$$

L'equazione della retta che passa per due punti *A (-1;3)* e *B(2;1)* è quindi:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

L'intercetta della retta data con l'asse delle ascisse (avendo *y = 0*) è:

$$x = -\frac{q}{m} = -\frac{\frac{7}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

**Esempio n. 2**
Sia data la retta che passa per due punti *A (-3;2)* e *B(5;1).*
Determinare: a) il coefficiente angolare *m* della retta; b) l'intercetta *q* della retta sull'asse delle ordinate; c) l'equazione della retta; d) l'intercetta della retta sull'asse delle ascisse.

**Risoluzione**
Il coefficiente angolare *m* della retta è:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-2)}{5-(-3)} = \frac{1+2}{5+3} = \frac{3}{8}$$

Poiché $m = \frac{3}{8} > 0$, la retta avrà una pendenza positiva e verrà tracciata da basso-sinistra verso alto-destra.
Data la retta di equazione $y = mx + q$, l'intercetta *q* sull'asse delle ordinate si ha quando x = 0. La formula per il calcolo di *q* è:

$$q = y - mx$$

Per determinare il *valore unico* di *q* (*intercetta della retta sull'asse delle ordinate*) si calcolano rispettivamente:

$$q_A = y_A - mx_A = -2 - \frac{3}{8} \cdot (-3) = -2 + \frac{9}{8} = \frac{-16+9}{3} = -\frac{7}{8}$$

e poi

$$q_B = y_B - mx_B = 1 - \frac{3}{8} \cdot 5 = 1 - \frac{15}{8} = \frac{8-15}{8} = -\frac{7}{8}$$

e si deve ottenere, necessariamente:

$$q_a = q_b = -\frac{7}{8}$$

L'equazione della retta che passa per due punti *A (-1;3)* e *B(2;1)* è quindi:

$$y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{8}$$

L'intercetta della retta data con l'asse delle ascisse (avendo *y = 0*) è:

$$x = -\frac{q}{m} = -\frac{-\frac{7}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

## Retta per un punto A($x_A$;$y_A$) e con un certo coefficiente angolare *m*

**Esempio**
Sia data la retta che ha coefficiente angolare $m = 2$ e passa per il punto $A\ (-3;-2)$.
Determinare: a) l'intercetta $q$ della retta sull'asse delle ordinate; c) l'intercetta della retta sull'asse delle ascisse; c) equazione della retta.

**Risoluzione**

Poiché $m = 2 > 0$, la retta avrà una pendenza positiva e verrà tracciata da basso-sinistra verso alto-destra.
Per determinare il *valore* di $q$ (*intercetta della retta sull'asse delle ordinate*) si calcola:

$$q_A = y_A - mx_A = -2 - 2 \cdot (-3) = -2 + 6 = 4$$

L'intercetta della retta data con l'asse delle ascisse (avendo $y = 0$) è:

$$x = -\frac{q}{m} = -\frac{4}{2} = -2$$

L'equazione della retta data è:

$$y = 2x + 4$$

## Retta passante per un punto e parallela ad una retta data

Siano noti il coefficiente angolare $m$ della prima retta e le coordinate del punto $A(x_A;y_A)$.
Siano note anche le coordinate del punto $B(x_B;y_B)$.
Le due rette, per essere parallele tra loro, devono avere lo stesso coefficiente angolare $m$, ma un distinto valore dell'intercetta $q$ sull'asse delle ordinate: altrimenti sarebbero coincidenti.
Poiché non devono avere alcun punto in comune, il punto ***A($x_A$;$y_A$)*** appartiene alla prima retta ed il punto ***B($x_B$;$y_B$)*** appartiene alla seconda retta, distinta dalla prima.
La retta passante per A, avrà equazione:

$$y_A = mx_A + q_A$$

Il valore $q_A$ sarà dato da:

$$q_A = y_A - mx_A$$

La retta passante per B, avrà equazione:

$$y_B = mx_B + q_B$$

Il valore $q_A$ sarà dato da:

$$q_B = y_B - mx_B$$

Si ricordi che $q_A \neq q_B$.

## Retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data

Sia data l'equazione di una retta *r*:

$$y = m_r x + q_r$$

e si voglia trovare l'equazione della retta *s*, perpendicolare alla retta *r*, e passante per un punto $A(x_A;y_A)$.
Il coefficiente angolare della retta *s* sarà *opposto e reciproco* del coefficiente angolare della retta *r*:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Quindi la retta *s*, passante per *A*($x_A$;$y_A$), avrà il seguente valore $q_s$:

$$q_s = y_A - m_s x_A = y_A + \frac{1}{m_r} x_A$$

In conclusione: la retta *s*, perpendicolare alla retta *r* e passante per *A*($x_A$;$y_A$), sarà determinata dalla seguente equazione:

$$y = -\frac{1}{m_r} x + q_s$$

**Intersezione tra due rette**

Siano date due rette *r* ed *s*, non parallele, definite dalle loro equazioni.
Per trovare il *punto d'intersezione I* (che necessariamente appartiene contemporaneamente alle due rette), bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = m_r x + q_r \\ y = m_s x + q_s \end{cases}$$

E' chiaro che le coordinate $x_I$ ed $y_I$ del *punto d'intersezione I* devono poi soddisfare le due equazioni del sistema.
Si ha che:

$$m_r x + q_r = m_s x + q_s$$

e quindi:

$$m_r x - m_s x = q_s - q_r$$

$$(m_r - m_s)x = q_s - q_r$$

$$x = \frac{q_s - q_r}{m_r - m_s}$$

Una volta calcolato questo valore di *x* (cioè $x_I$) lo si sostituisce in una qualsiasi delle due equazioni del sistema e si trova la coordinata $y_I$.
Risulta così determinata la posizione del *punto d'intersezione I*($x_I$;$y_I$) tra le rette *r* ed *s*.

## Esercizi proposti (grafico della retta e rappresentazione di fenomeni)

**Esercizio n. 1**
Un rubinetto *a* versa acqua in un recipiente A alla velocità di 2 litri al minuto. Un rubinetto *b* versa acqua in un recipiente B alla velocità di 1,5 litri al minuto. Dopo 4 minuti, quanta acqua in più c'è nel recipiente A rispetto a quella contenuta nel recipiente B?
All'inizio dell'esperienza, i due rubinetti vengono aperti contemporaneamente.

**Esercizio n. 2**
Un rubinetto *a* versa acqua in un recipiente A alla velocità di 1,5 litri al minuto. Un rubinetto *b* versa acqua in un recipiente B alla velocità di 2 litri al minuto.
In quale momento ci sarà la stessa quantità di acqua nei due recipienti A e B?
All'inizio dell'esperienza, i due rubinetti vengono aperti contemporaneamente.

**Esercizio n. 3**
Un rubinetto *a* versa acqua in un recipiente A alla velocità di 4 litri al minuto. Un rubinetto *b* versa acqua in un recipiente B (che inizialmente contiene già 3 litri d'acqua) alla velocità di 2 litri al minuto.
In quale momento ci sarà la stessa quantità di acqua nei due recipienti A e B?
All'inizio dell'esperienza, i due rubinetti vengono aperti contemporaneamente.

**Esercizio n. 4**
Un recipiente A contiene 10 litri di acqua: aprendo il rubinetto a, si lascia uscire l'acqua alla velocità di 1 litro al minuto. In un recipiente B (che contiene inizialmente 4 litri di acqua), un rubinetto b versa altra acqua, alla velocità di 0, litri al minuto.
In quale momento ci sarà la stessa quantità di acqua nei due recipienti A e B?
All'inizio dell'esperienza, i due rubinetti vengono aperti contemporaneamente.

**Esercizio n. 5**
Mario ha in tasca 12 euro e spende 1 euro ogni 8 ore.
Dopo quanti giorni e quante ore rimarrà senza soldi?
Giuseppe ha 2 euro in tasca e, ogni 8 ore, riceve un euro dai suoi genitori.
Dopo quanti giorni e quante ore Giuseppe e Mario avranno la stessa quantità di denaro?
C'è un momento in cui Mario ha il doppio del denaro di Giuseppe?
C'è un momento in cui Giuseppe ha il doppio del denaro di Mario?
L'esperienza proposta inizia contemporaneamente.

**Nota**.
In ogni esercizio:
- rappresentare graficamente i fenomeni individuati;
- definire i coefficienti angolari delle rette;
- definire, per ogni retta, l'intercetta sull'asse delle ordinate
- definire, per ogni retta, l'intercetta sull'asse delle ascisse;
- rispondere alle domande formulando una risposta semplice e comprensibile.