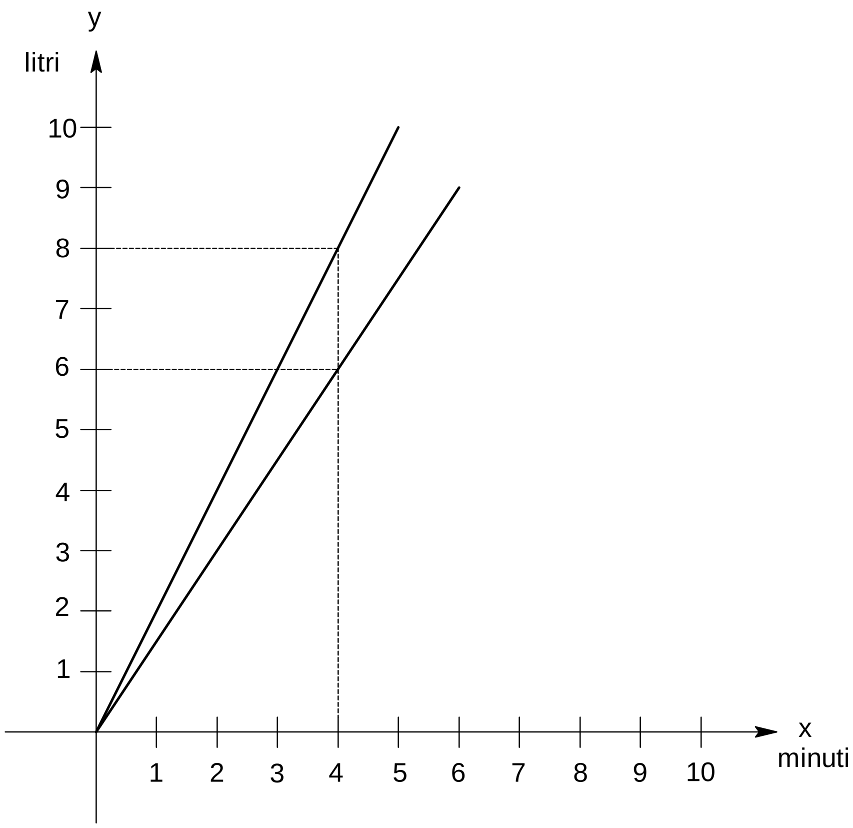
Istituto “L. Einaudi” Montebelluna
Elaborato di Fisica – dicembre 2010

Grafico della retta e rappresentazione di fenomeni

Soluzioni degli esercizi di dicembre 2010

Nota.
In ogni esercizio:
- rappresentare graficamente i fenomeni individuati;
- eseguire tutti i passaggi matematici per le dimostrazioni (formule, calcoli intermedi e risultati finali);
- definire i coefficienti angolari delle rette;
- definire, per ogni retta, l’intercetta sull’asse delle ordinate
- definire, per ogni retta, l’intercetta sull’asse delle ascisse;
- rispondere alle domande, formulando una risposta semplice e comprensibile.

Esercizio n. 1
Un rubinetto *a* versa acqua in un recipiente A alla velocità di 2 litri al minuto. Un rubinetto *b* versa acqua in un recipiente B alla velocità di 1,5 litri al minuto. Dopo 4 minuti, quanta acqua in più c’è nel recipiente A rispetto a quella contenuta nel recipiente B?
All’inizio dell’esperienza, i due rubinetti vengono aperti contemporaneamente.



Risoluzione
Le velocità di riempimento dei recipienti corrispondono ai coefficienti angolari delle rette.
Quindi:

$$v_a = \frac{2\ litri}{1\ minuto} \quad \text{e} \quad m_a = \frac{2}{1} = 2$$

$$v_b = \frac{1{,}5\ litri}{1\ minuto} \quad \text{e} \quad m_a = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$$

Poiché i due recipienti sono inizialmente vuoti, le due rette hanno l’intercetta sull’asse y uguale a zero: $q_a = 0\ litri$ e $q_b = 0\ litri$.
Per entrambe le rette, si ricava facilmente che, all’istante $t = 0\ minuti$, anche l’intercetta sull’asse x è uguale a zero:

$$x_a = -\frac{q_a}{m_a} = -\frac{0}{2} = 0\ minuti$$

$$x_b = -\frac{q_b}{m_b} = -\frac{0}{1{,}5} = 0\ minuti$$

Le rette $y = mx + q$ diventano quindi, per $q = 0$, $y = mx$.
Si deduce che passano per l’origine O (0;0).
Calcoliamo qual è la quantità di acqua contenuta nei due recipienti dopo 4 minuti.
Nel recipiente A:

$$y_a = m_a x = \frac{2\ litri}{1\ minuto} \cdot 4\ minuti = 8\ litri$$

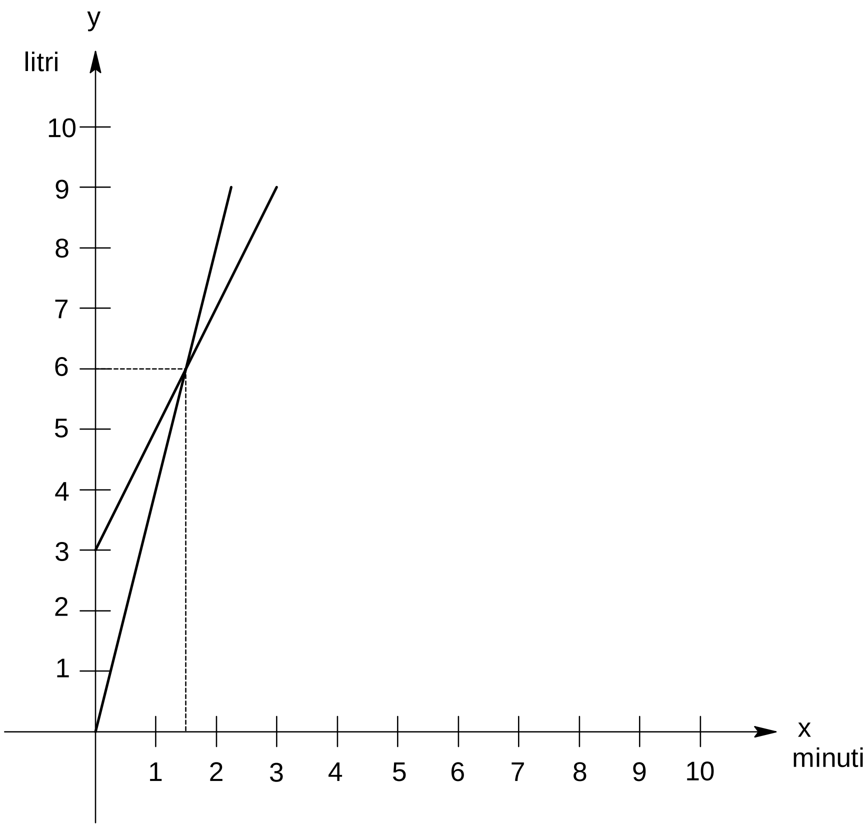
Nel recipiente B:

$$y_b = m_b x = \frac{1{,}5\ litri}{1\ minuto} \cdot 4\ minuti = 6\ litri$$

Conclusione: dopo 4 minuti, nel recipiente A ci sono 2 litri di acqua in più rispetto a quanto contenuto nel recipiente B.

$$y_a - y_b = (8 - 6)\ litri = 2\ litri$$

Esercizio n. 2
Un rubinetto *a* versa acqua in un recipiente A alla velocità di 4 litri al minuto. Un rubinetto *b* versa acqua in un recipiente B (che inizialmente contiene già 3 litri d'acqua) alla velocità di 2 litri al minuto.
In quale momento ci sarà la stessa quantità di acqua nei due recipienti A e B?
All'inizio dell'esperienza, i due rubinetti vengono aperti contemporaneamente.



Risoluzione
Le velocità di riempimento dei recipienti corrispondono ai coefficienti angolari delle rette.
Quindi:

$$v_a = \frac{4\ litri}{1\ minuto} \quad \text{e} \quad m_a = \frac{4}{1} = 4$$

$$v_b = \frac{2\ litri}{1\ minuto} \quad \text{e} \quad m_b = \frac{2}{1} = 2$$

Poiché solo il recipiente A è inizialmente vuoto, la retta corrispondente ha l'intercetta sull'asse y uguale a zero: $q_a = 0\ litri$. Per la stessa retta, si ricava facilmente che, all'istante $t = 0\ minuti$, anche l'intercetta sull'asse x è uguale a zero:

$$x_a = -\frac{q_a}{m_a} = -\frac{0}{4} = 0\ minuti$$

La retta $y = mx + q$ diventa quindi, per $q = 0$, $y_a = m_a x$.
Si deduce che essa passa per l'origine O (0;0).
L'equazione della retta è:

$$y_a = \frac{4\ litri}{1\ minuto} \cdot x\ minuti$$

Nel caso del recipiente B (che inizialmente contiene già 3 litri d'acqua) si ha che l'intercetta sull'asse y è: q_b = *3 litri*.
L'equazione della retta è:

$$y_b = \frac{2\ litri}{1\ minuto} \cdot x\ minuti + 3\ litri$$

Riducendo, si ottiene:

$$\begin{cases} y_a = 4x \\ y_b = 2x + 3 \end{cases}$$

Calcoliamo in quale momento hanno la stessa quantità d'acqua:

$$\begin{cases} y_a = y_b \\ 4x = 2x + 3 \end{cases} \qquad 4x = 2x + 3 \qquad 4x - 2x = +3 \qquad 2x = 3 \qquad x = \frac{3}{2}\ minuti$$

Ciò accade dopo *1m 30s*.

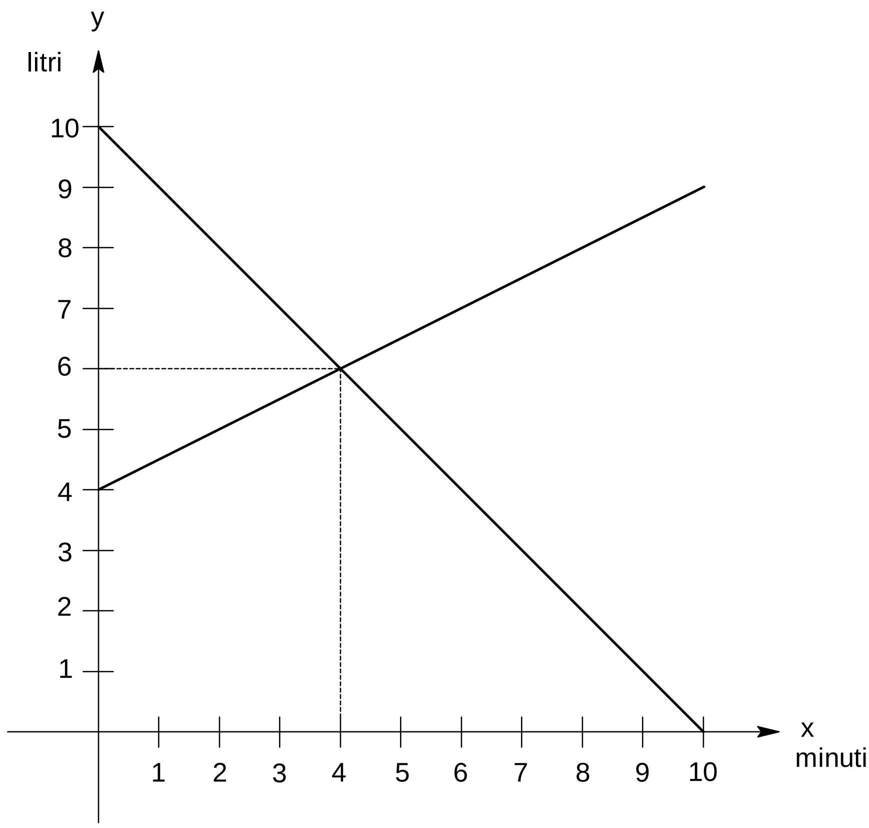
Verifichiamo che i due recipienti abbiano proprio la stessa quantità d'acqua.

$$\begin{cases} y_a = \dfrac{4\ litri}{1\ minuto} \cdot \dfrac{3}{2} minuto = 6\ litri \\ y_b = \dfrac{2 litri}{1\ minuto} \cdot \dfrac{3}{2} minuto + 3\ litri = 6\ l \quad tri \end{cases}$$

La retta del recipiente B intercetta l'asse delle ascisse in:

$$x_b = -\frac{q_b}{m_b} = -\frac{3}{2} minuti$$

Esercizio n. 3
Un recipiente A contiene 10 litri di acqua: aprendo il rubinetto a, si lascia uscire l’acqua alla velocità di 1 litro al minuto. In un recipiente B (che contiene inizialmente 4 litri di acqua), un rubinetto b versa altra acqua, alla velocità di 0,5 litri al minuto.
In quale momento ci sarà la stessa quantità di acqua nei due recipienti A e B?
All’inizio dell’esperienza, i due rubinetti vengono aperti contemporaneamente.



Risoluzione
Le velocità di svuotamento e di riempimento dei recipienti corrispondono ai coefficienti angolari delle rette.
Quindi:

$$v_a = -\frac{1\ litri}{1\ minuto} \quad \text{e} \quad m_a = -\frac{1}{1} = -1$$
$$v_b = \frac{0{,}5\ litri}{1\ minuto} \quad \text{e} \quad m_b = \frac{0{,}5}{1} = \frac{1}{2}$$

Notare che, per il rubinetto a, il coefficiente angolare è negativo.
Poiché il recipiente A contiene 10 litri di acqua e il recipiente B contiene inizialmente 4 litri di acqua, le retta corrispondente hanno le intercette sull’asse y uguale a:

$$\begin{cases} q_a = 10\ litri \\ q_b = 4\ litri \end{cases}$$

Le equazioni delle due rette saranno:

$$\begin{cases} y_a = -\dfrac{1\ litri}{1\ minuto} \cdot x\ minuti + 10\ litri \\ y_b = \dfrac{1\ litri}{2\ minuto} \cdot x\ minuti + 4\ litri \end{cases}$$

Semplificando, calcoliamo dopo quanto tempo i due recipienti avranno la stessa quantità d’acqua:

$$\begin{cases} y_a = -x + 10 \\ y_b = \dfrac{1}{2}x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_b = y_b \\ -x + 10 = \dfrac{1}{2}x + 4 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x + x = 10 - 4 \qquad \frac{3}{2}x = 6 \qquad x = 4\ minuti$$

Ciò accade dopo *4 minuti*.

Verifichiamo che i due recipienti abbiano proprio la stessa quantità d’acqua.

$$\begin{cases} y_a = -\dfrac{1\ litri}{1\ minuto} \cdot 4\ minuti + 10\ litri = 6\ litri \\ y_b = \dfrac{1\ litri}{2\ minuto} \cdot 4\ minuti + 4\ litri = 6\ litri \end{cases}$$

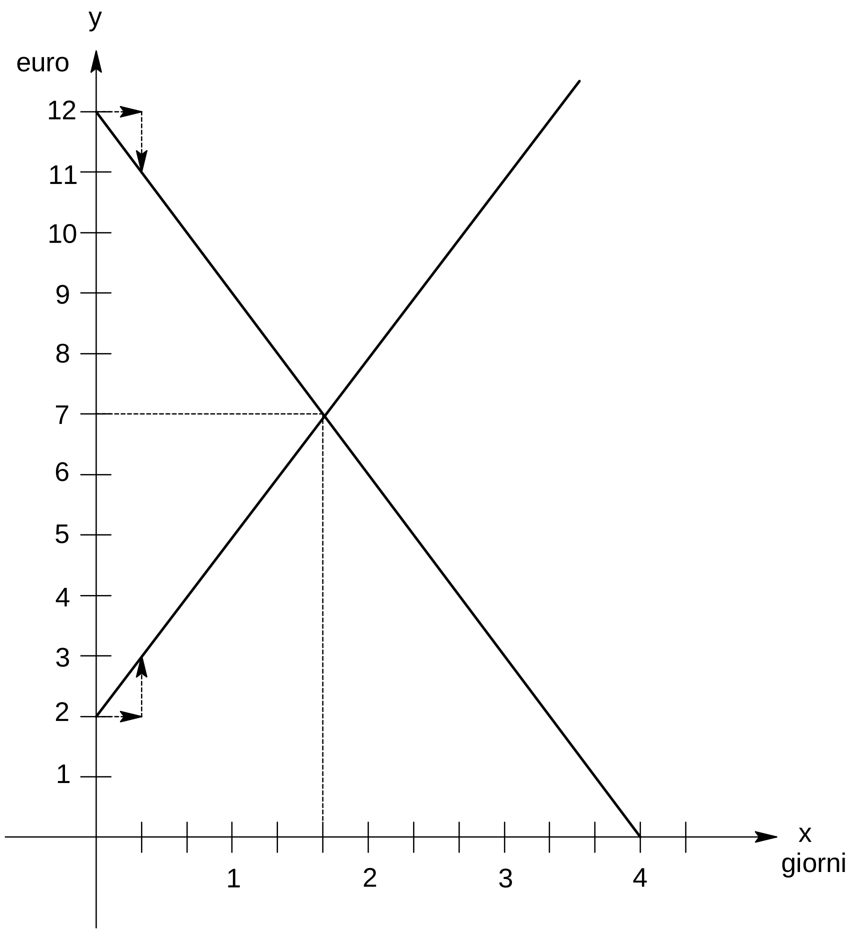
Intercetta sull’asse delle ascisse per il recipiente A.

$$x_a = -\frac{q_a}{m_a} = -\frac{10\ litri}{-\dfrac{1\ litro}{1\ minuto}} = 10\ minuti$$

Il recipiente A si svuoterà dopo *10 minuti*.
Intercetta sull’asse delle ascisse per il recipiente B.

$$x_b = -\frac{q_b}{m_b} = -\frac{4\ litri}{\dfrac{1\ litro}{2\ minuto}} = -8\ minuti$$

Esercizio n. 4
Mario ha in tasca 12 euro e spende 1 euro ogni 8 ore.
Dopo quanti giorni e quante ore rimarrà senza soldi?
Giuseppe ha 2 euro in tasca e, ogni 8 ore, riceve un euro dai suoi genitori.
Dopo quanti giorni e quante ore Giuseppe e Mario avranno la stessa quantità di denaro?
L’esperienza proposta inizia contemporaneamente.



Risoluzione
Mario inizialmente ha in tasca 12 euro, quindi $q_M = 12\ euro$.
Giuseppe inizialmente ha in tasca 2 euro, quindi $q_G = 2\ euro$.
Queste sono le due intercette, per Mario e per Giuseppe, sull’asse y delle ordinate.
La velocità con cui Mario spende i suoi soldi è:

$$v_M = -\frac{1\ euro}{8\ ore} = -\frac{3\ euro}{1\ giorno} \quad \text{e} \quad m_M = -\frac{1}{8}$$

Notare che il coefficiente angolare è negativo.
La velocità con cui Giuseppe si mette in tasca altri soldi è:

$$v_G = \frac{1\ euro}{8\ ore} = \frac{3\ euro}{1\ giorno} \quad \text{e} \quad m_G = \frac{1}{8}$$

Calcoliamo dopo quanto tempo Mario rimarrà senza soldi in tasca.

Si deve calcolare l'intercetta sull'asse x delle ascisse:

$$x_M = -\frac{q_M}{m_M} = -\frac{12\ euro}{-\frac{1\ euro}{8\ ore}} = -12\ euro\left(-\frac{8\ ore}{1\ euro}\right) = 96\ ore$$

Le *96 ore* corrispondono a *4 giorni*.

Le equazioni delle due rette saranno:

$$\begin{cases} y_M = -\frac{1\ euro}{8\ ore} \cdot x\ ore + 12\ euro \\ y_G = \frac{1\ euro}{8\ ore} \cdot x\ ore + 2\ euro \end{cases}$$

Semplificando, otteniamo:

$$\begin{cases} y_M = -\frac{1}{8} \cdot x\ + 12 \\ y_G = \frac{1}{8} \cdot x\ + 2 \end{cases}$$

Calcoliamo dopo quanto tempo Mario e Giuseppe avranno la stessa cifra in tasca, cioè $y_M = y_G$.

$$\begin{cases} y_M = -\frac{1}{8} \cdot x\ + 12 \\ y_G = \frac{1}{8} \cdot x\ + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_M = y_G \\ \frac{1}{8} \cdot x\ + 2\ = -\frac{1}{8} \cdot x\ + 12 \end{cases} \quad \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x = 12 - 2 \quad \frac{2}{8}x = 10$$

Cioè:

$$\frac{1}{4}x = 10 \quad \text{ossia:} \quad x = 10 \cdot 4 = 40\ ore$$

Mario e Giuseppe avranno la stessa cifra in tasca dopo *40 ore*, cioè dopo *1 giorno e 16 ore*.

La cifra che Mario e Giuseppe avranno in tasca, dopo 40 ore, sarà:

$$\begin{cases} y_M = -\frac{1\ euro}{8\ ore} \cdot 40\ ore + 12\ euro = (-5 + 12) euro = 7\ euro \\ y_G = \frac{1\ euro}{8\ ore} \cdot 40\ ore + 2\ euro = (5 + 2)\ euro = 7\ euro \end{cases}$$