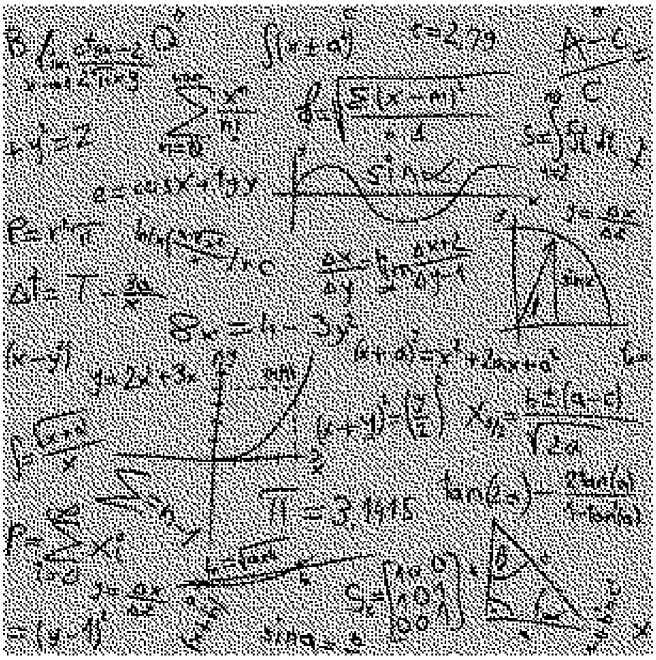
Silvio Reato



Appunti di Matematica

Settembre 2010

Le quattro operazioni fondamentali

Addizione

Dati due numeri *a* e *b* (detti *addendi*), si ottiene sempre un termine *s* detto loro *somma*.

$$a + b = s$$

Per l'addizione valgono le seguenti proprietà:
proprietà associativa: è data nella definizione di addizione, perché a due addendi *a* e *b* viene sempre associato un unico risultato, detto loro *somma*;

$$a + b = s$$

proprietà commutativa: cambiando l'ordine degli addendi, la somma non cambia;

$$a + b = b + a = s$$

esistenza dell'elemento neutro: lo *zero* è l'elemento neutro dell'addizione; la somma risultante è uguale al numero che viene addizionato allo zero.

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Addendo: è il termine "*che deve essere aggiunto*", "*che deve essere addizionato*".

Sottrazione

Dati due numeri *a* (detto *minuendo*) e *b* (detto *sottraendo*), si ottiene sempre un termine *d* detto loro *differenza*.

$$a - b = d$$

Per la sottrazione valgono le seguenti proprietà:
proprietà associativa: è data nella definizione di sottrazione, perché ad un minuendo e ad un sottraendo viene sempre associato un unico risultato, detto loro *differenza*;

$$a - b = d$$

non vale proprietà commutativa: cambiando l'ordine del minuendo e del sottraendo, ed eseguendo la successiva sottrazione, si ottengono due risultati opposti;

$$a - b = d$$
$$b - a = -d$$

esistenza dell'elemento neutro: lo *zero* è l'elemento neutro della sottrazione, solo se viene posto come sottraendo; solo in questo caso la è uguale al numero che viene scelto come minuendo.

$$a - 0 = a$$
$$0 - a = -a$$

Minuendo: è il termine che viene scritto per primo (a sinistra o in alto) in una sottrazione; significa "*che deve essere diminuito*", "*che deve essere reso più piccolo*".
Sottraendo: è il termine che viene scritto per secondo (a destra o in basso) in una sottrazione; significa "*che deve essere tirato via*", "*che deve essere tolto*".

Moltiplicazione

Dati due numeri *a* e *b* (detti *fattori*), si ottiene sempre un termine *p* detto loro *prodotto*.

$$a \cdot b = p$$

Per la moltiplicazione valgono le seguenti proprietà:
proprietà associativa: è data nella definizione di moltiplicazione, perché a due fattori *a* e *b* viene sempre associato un unico risultato, detto loro *prodotto*;

$$a \cdot b = p$$

proprietà commutativa: cambiando l'ordine degli fattori, il prodotto non cambia;

$$a \cdot b = b \cdot a = p$$

esistenza dell'elemento neutro: il *numero uno* è l'elemento neutro della moltiplicazione; il prodotto risultante è uguale al numero che viene moltiplicato per uno.

$$a \cdot 1 = a$$

Divisione
Dati due numeri *a* (detto *dividendo*) e *b* (detto *divisore*), si ottiene sempre un termine *q* detto loro *quoziente* ed un eventuale resto.

$$a : b = q \quad con\, r \neq 0$$

da cui si ricava:

$$a = b \cdot q + r$$

Esempio

$$15 : 2 = 7 \quad con\, r = 1$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

Se il resto è uguale a zero non si parla di quoziente, ma di *quoto*.

$$a : b = q$$

da cui si ricava:

$$a = b \cdot q$$

Esempio

$$12 : 2 = 6 \quad con\, r = 0$$

$$12 = 2 \cdot 6$$

Il divisore non può essere zero, altrimenti non si hanno soluzioni reali.

Per la divisione valgono le seguenti proprietà:
proprietà associativa: è data nella definizione di divisione, perché ad un *dividendo* e ad un *divisore* viene sempre associato un unico risultato, detto loro *quoziente* (o, con resto uguale a zero, *quoto*);
non vale proprietà commutativa: cambiando l'ordine del dividendo e del divisore, ed eseguendo la successiva divisione, si ottengono due risultati ed il primo è reciproco del secondo;

$$5:4=\frac{5}{4}$$

e

$$4:5=\frac{4}{5}$$

quindi

$$\frac{5}{4}\neq\frac{4}{5}$$

perché

$$\frac{5}{4}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=1\cdot\frac{5}{4}$$

esistenza dell'elemento neutro: il divisore uno è l'elemento neutro della divisione.
Solo in questo caso il quoto è uguale al numero che viene scelto come dividendo:

$$12:1=12$$

Dividendo: è il termine che viene scritto per primo, a sinistra in una divisione (o in alto in una frazione); significa "che *deve essere diviso*".
Divisore: è il termine che viene scritto per secondo, a destra in una divisione (o in basso in una frazione); significa "*che divide*".

Alcune annotazioni di casi particolari

Un numero addizionato allo zero dà come somma il numero stesso.

$$a+0=a$$

L'addizione di due numeri opposti dà come somma lo zero.

$$a+(-a)=a-a=0$$

Se si sottrae lo zero (sottraendo) da un numero (minuendo), si ottiene come differenza il minuendo.

$$a-0=a$$

Se si moltiplica un numero (fattore) per l'unità, si ottiene il numero stesso, cioè lo stesso fattore.

$$a\cdot 1=a$$

Legge dell'annullamento del prodotto: se si moltiplicano uno o più numeri (fattori) per zero, si ottiene come prodotto lo zero.

$$a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot \ldots\cdot 0=0$$

Se si divide un numero per uno, si ottiene il numero stesso.

$$a:1=a$$

Se si divide un numero per se stesso, si ottiene *uno*.

$$a:a=1$$

La moltiplicazione di due numeri reciproci dà come prodotto il numero uno.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

La divisione di un numero $a \neq 0$ per zero non dà valori reali.

$$\frac{a}{0} \ non\ ha\ soluzioni\ reali$$

La divisione "zero su zero" è indeterminata.

$$\frac{0}{0} \text{ è } una\ forma\ indeterminata$$

Le frazioni

Il termine *frazione* deriva dal latino *fràngere*, che significa *rompere*, *dividere, frammentare*. Il participio passato di *fràngere* è presente in tre forme: *fràctus* (maschile), *fràcta* (femminile) e *fràctum* (neutro).
Quando noi trattiamo delle frazioni e ne diamo la descrizione in lingua italiana, usiamo comunemente il termine *fràtto*, che significa *divìso*.
Quindi una divisione del tipo:

$$a : b$$

corrisponde ad una frazione:

$$\frac{a}{b}$$

che si legge "*a fratto b*" oppure "*a su b*".
Nota: essendo *b* un divisore, deve essere sempre $b \neq 0$.
Il termine *a* viene detto *numeratore della frazione*.
Il termine *b* viene detto *denominatore della frazione*.
Il *tratto grafico scritto tra numeratore e denominatore* viene detto *segno di frazione*.

Tipi di frazioni

Frazioni proprie (con a < b)
Le frazioni proprie presentano il numeratore che è sempre più piccolo del denominatore.
Esempio
Si immagini di avere una torta e di dividerla in 8 parti. Si prendano poi 3 di queste parti per mangiarle.
Noi abbiamo *realmente* preso e mangiato "*3 fette su 8 disponibili*".
Rappresentiamo questo con la *frazione propria*:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{8}$$

Le frazioni che esprimono l'unità (con a = b)
Le frazioni che esprimono l'unità presentano il numeratore che è sempre uguale al denominatore. Si ricordi infatti che "*un numero diviso per se stesso è uguale ad uno*".
Esempio
Si immagini di avere *una torta* e di dividerla in 8 parti. Si prendano poi 8 di queste parti per mangiarle.
Noi abbiamo *realmente* preso e mangiato "*8 fette su 8 disponibili*", cioè "*tutta la torta*" e quindi "*una torta*".
Rappresentiamo questo con la frazione:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{8}{8} = 1$$

Frazioni improprie (con a > b)
Le frazioni improprie presentano il numeratore che è sempre più grande del denominatore.
Esempio
Si abbia una torta (realmente esistente) e di dividerla in 8 parti. Si immagini poi di voler prendere 11 di queste parti per mangiarle.
E' chiaro che 8 fette ce le possiamo prendere per mangiarle, ma le altre tre ce le dobbiamo inventare, perché non sono proprio disponibili nella realtà.

Rappresentiamo questo con la *frazione impropria*:

$$\frac{a}{b} = \frac{11}{8}$$

Confronto tra frazioni

Frazioni che hanno lo stesso denominatore

Per verificare quale delle frazioni messe a confronto sia più piccola o più grande è sufficiente confrontare tra loro i rispettivi numeratori.

Esempio

Confrontare le frazioni date e metterle nell'ordine crescente:

$$\frac{11}{8};\frac{4}{8};\frac{19}{8};\frac{21}{8};\frac{1}{8}$$

Risposta:

$$\frac{1}{8};\frac{4}{8};\frac{11}{8};\frac{19}{8};\frac{21}{8}$$

Esempio

Confrontare le frazioni date e metterle nell'ordine decrescente:

$$\frac{11}{8};\frac{4}{8};\frac{19}{8};\frac{21}{8};\frac{1}{8}$$

Risposta:

$$\frac{21}{8};\frac{19}{8};\frac{11}{8};\frac{4}{8};\frac{1}{8}$$

Frazioni che hanno diverso denominatore

Innanzi tutto si ricerca il minimo comune multiplo dei denominatori.

Poi si divide il minimo comune multiplo dei denominatori per ogni singolo denominatore e si moltiplica il valore trovato per il numeratore della frazione presa in esame.

Si ripete questa procedura per tutte le frazioni da confrontare.

Infine, come definito qui sopra, per verificare quale delle frazioni messe a confronto sia più piccola o più grande, sarà sufficiente confrontare tra loro i rispettivi numeratori delle varie frazioni così definite.

Esempio

Confrontare le frazioni date e poi metterle nell'ordine crescente:

$$\frac{21}{4};\frac{19}{6};\frac{11}{3}$$

Il minimo comune multiplo tra 4, 6 e 3 è 12.

I termini della prima frazione (numeratore e denominatore) saranno moltiplicati per 3.

I termini della seconda frazione (numeratore e denominatore) saranno moltiplicati per 2.

I termini della terza frazione (numeratore e denominatore) saranno moltiplicati per 4.

Si ottengono le seguenti frazioni:

$$\frac{21\cdot 3}{4\cdot 3};\frac{19\cdot 2}{6\cdot 2};\frac{11\cdot 4}{3\cdot 4}$$

ossia:

$$\frac{63}{12};\frac{38}{12};\frac{44}{12}$$

Tornando quindi alle corrispondenti frazioni originarie, possiamo ordinarle nell'ordine crescente:

$$\frac{19}{6} < \frac{11}{3} < \frac{21}{4}$$

Frazione apparente

In una frazione apparente, si ha che il numeratore ed il denominatore sono divisibili per uno stesso numero. Dalla semplificazione si ottiene una *frazione ridotta ai minimi termini*.

Esempi

$$\frac{30}{4} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{52}{13} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 1}{13 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4$$

Somma (o differenza) di frazioni

Frazioni hanno lo stesso denominatore

Se le frazioni hanno lo stesso denominatore, si ottiene una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma (o la differenza) dei numeratori delle singole frazioni.

Esempio

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5 - 2 + 4}{7} = \frac{9}{7}$$

Frazioni con diverso denominatore

Se le frazioni hanno diverso denominatore, si trova innanzi tutto il minimo comune denominatore, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 6 - 5 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{24} = \frac{18 - 20 + 3}{24} = \frac{1}{24}$$

Si divide quest'ultimo per il denominatore di ogni singola frazione e si moltiplica il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione considerata.
Si ripete la procedura, trattando tutte le singole frazioni presenti.
Si calcolano i prodotti caratteristici dei singoli numeratori.
Si ottiene quindi una frazione che ha per denominatore il minimo comune multiplo dei denominatori e per numeratore la somma algebrica dei numeratori delle singole frazioni.
Si può avere anche il caso di una frazione apparente, riducibile ai minimi termini.

Moltiplicazione tra frazioni

Dalla moltiplicazione di due o più frazioni si ottiene una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori delle frazioni date e per denominatore il prodotto dei denominatori delle frazioni date.
Si può avere anche il caso di una frazione apparente, riducibile ai minimi termini.
E' opportuno però lavorare sempre con numeri piccoli e, dove ciò sia possibile, eseguire delle semplificazioni incrociate tra uno o più numeratori e uno o più denominatori.

Esempio

$$\frac{15}{7} \cdot \frac{28}{3} \cdot \frac{1}{40} = \frac{5 \cdot 3}{7} \cdot \frac{4 \cdot 7}{3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Divisione tra frazioni

La divisione tra due o più frazioni si può ricondurre ad una moltiplicazione tra frazioni, lasciando inalterata la prima frazione della serie, per poi moltiplicarla per il reciproco di ogni altra singola frazione.

Si può avere anche il caso di una frazione apparente, riducibile ai minimi termini.

E' opportuno però lavorare sempre con numeri piccoli e, dove ciò sia possibile, eseguire delle semplificazioni incrociate tra uno o più numeratori e uno o più denominatori.

Esempio

$$\frac{15}{7}:\frac{5}{14}:\frac{4}{3}=\frac{15}{7}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{7}\cdot\frac{2\cdot 7}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$$

Le potenze

L'operazione "*potenza di un numero*" è un caso particolare di moltiplicazione e prevede che tutti i fattori siano uguali tra loro. A questo (e si vedrà in seguito il perché) si può aggiungere il fattore uno, che è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Descrizione della simbologia a^n
Il termine *a* viene detto *base*; il termine *n* viene detto *esponente*.
La simbologia a^n viene letta come "*a* elevato alla enne" o "ennesima potenza di *a*".
La simbologia a^n può essere rappresentata nel seguente modo, ripetendo per *n* volte il fattore *a*:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot 1$$

Casi particolari di a^n

$$0^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 1 = 0$$

$$1^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$$

$$a^0 = 1 \text{ (con } a \neq 0\text{)}$$

$$a^1 = a$$

Moltiplicazione di potenze che hanno la stessa base
Moltiplicando tra loro due potenze che hanno la stessa base, si ottiene come risultato una potenza che ha ancora la stessa base e, come esponente, la somma degli esponenti.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esempio

$$a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$$

Infatti:

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot 1) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1) = a^7 \cdot 1 = a^7$$

Divisione di potenze che hanno la stessa base (con $a \neq 0$)
Dividendo tra loro due potenze che hanno la stessa base, si ottiene come risultato una potenza che ha ancora la stessa base e, come esponente, la differenza degli esponenti.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Esempi
1° caso con **m** > **n** (esponente finale positivo)

$$a^7 : a^2 = a^{7-2} = a^5$$

$$\frac{a^7}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1}{a \cdot a \cdot 1} = a^5$$

2° caso con **m** = **n** (esponente finale nullo)

$$a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0 = 1$$

$$\frac{a^4}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1} = 1 = a^0$$

3° caso con **m < n** (esponente finale negativo)

$$a^2 : a^6 = a^{2-6} = a^{-4}$$

$$\frac{a^2}{a^6} = \frac{a \cdot a \cdot 1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1} = \frac{1}{a^4} = a^{-4}$$

Osservazioni sul 3° caso

La potenza di una **base intera elevata ad un esponente negativo** è equivalente ad una frazione che ha *uno* al numeratore e, al denominatore la stessa base intera, però elevata all'esponente reso positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

La potenza di una **base frazionaria elevata ad un esponente negativo** è equivalente ad una frazione che ha *uno* al numeratore e, al denominatore la stessa base frazionaria, però elevata all'esponente reso positivo.

Alla fine si ottiene una potenza che ha come base la frazione reciproca di quella iniziale, però elevata all'esponente reso positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Esempio

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

Potenza di potenza

La simbologia $(a^m)^n$ è definita "potenza di potenza" e si può spiegare come il prodotto di a^m moltiplicato *n* volte per se stesso.

La potenza di potenza $(a^m)^n$ di base a, con primo esponente *m* e con secondo esponente *n*, è equivalente ad una potenza che ha ancora la stessa base e, per esponente, il prodotto degli esponenti:

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} \cdot 1 = a^{n\cdot m} = a^{n\cdot m}$$

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot 1$$

dove i fattori a^m sono ripetuti per *n* volte.

Si ricordi che *vale la proprietà commutativa della moltiplicazione, anche a livello degli esponenti*.

Quindi:

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} \cdot 1 = a^{n\cdot (\square)} \cdot 1 = a^{n\cdot m}$$

Esempio

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 \cdot 1 = a^{3+3} \cdot 1 = a^{3\cdot 2} \cdot 1 = a^6 \cdot 1 = a^6$$

$$(a^2)^3 = (a^2 \cdot a^2 \cdot 1) \cdot (a^2 \cdot a^2 \cdot 1) \cdot (a^2 \cdot a^2 \cdot 1) = a^{2+2+2} \cdot 1 = a^{2\cdot 3} \cdot 1 = a^6 \cdot 1 = a^6$$

Raggruppamento di una stessa base
Dalla moltiplicazione e/o dalla divisione di potenze che hanno tutte la stessa base, si ottiene una potenza che ha ancora una stessa base e, per esponente, la somma algebrica degli esponenti.
Esempio

$$\frac{a^n \cdot a^p \cdot a}{a^s} = a^{n+p+1-s}$$

Raggruppamento di uno stesso esponente
Dalla moltiplicazione di una serie di basi che hanno tutte un certo esponente, si ottiene ancora una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e, per base, il prodotto delle diverse basi.
Esempio

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n \cdot \ldots \cdot 1 = (a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots \cdot 1)^n$$

La potenza con esponente frazionario
Una potenza con esponente frazionario:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

è equivalente ad un radicando (termine che va scritto sotto radice) elevato all'esponente m e, il tutto, va posto sotto radice n-esima.
Il numero *n* è detto *indice della radice*.
Il numero *m* è detto *esponente del radicando*.

Esempi

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$$

Nota: l'indice 2 della radice quadrata va sempre sottinteso, mai scritto.

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a}$$

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Sia $n \neq 0$. **La radice *n*-esima di una base elevata all'*n*-esima potenza è uguale alla base stessa**.

$$\sqrt[3]{a^3} = a; \quad \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$$

$$\sqrt{a^2 = a}; \quad \sqrt[4]{(a^6)^2} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = a^3$$

$$a^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a^1 = a$$

Le proporzioni

Una proporzione è definita come l'uguaglianza tra due rapporti.
La sua rappresentazione simbolica è la seguente:

$$a : b = c : d$$

I termini ***a*** e ***d*** sono detti ***estremi***, perché si trovano lontano (a sinistra e a destra) rispetto al segno di uguaglianza.
Più in particolare: *a* è il *primo estremo*, *d* è il *secondo estremo*.
I termini ***b*** e ***c*** sono detti ***medi***, perché si trovano vicino (a sinistra e a destra) rispetto al segno di uguaglianza.
Più in particolare: *b* è il *primo medio*, *c* è il *secondo medio*.
I termini ***a*** e ***c*** sono detti ***antecedenti***, perché si trovano prima (a sinistra) rispetto al segno di divisione.
Più in particolare: *a* è il *primo antecedente*, *c* è il *secondo antecedente*.
I termini ***b*** e ***d*** sono detti ***conseguenti***, perché si trovano dopo (a destra) rispetto al segno di divisione.
Più in particolare: *b* è il *primo conseguente*, *d* è il *secondo conseguente*.

Regola fondamentale delle proporzioni
Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.
Data la proporzione:

$$a : b = c : d$$

si deve sempre avere, *scambiando tra loro gli estremi e/o i medi*:

$$a \cdot d = b \cdot c \quad \text{oppure} \quad d \cdot a = c \cdot b$$

poiché vale la proprietà commutativa della moltiplicazione.
La situazione rimane sempre valida anche se *si scambiamo contemporaneamente, a destra e a sinistra dell'uguale, il primo antecedente con il primo conseguente ed il secondo antecedente con il secondo conseguente*, ottenendo:

$$b : a = d : c$$

Infatti rimane valida la condizione:

$$a \cdot d = b \cdot c \quad \text{oppure} \quad d \cdot a = c \cdot b$$

poiché si applica ancora una volta la proprietà commutativa della moltiplicazione.

In genere ci si ritrova a dover risolvere una proporzione in cui ci sono *tre termini noti* ed un termine non noto, definito come ***incognita*** e rappresentato ad esempio dalla lettera ***x***.
Se l'incognita *x* è *un estremo*, il suo valore viene dato dal prodotto dei due medi, diviso poi per l'altro estremo.
Se l'incognita *x* è *un medio,* il suo valore viene dato dal prodotto dei due estremi, diviso poi per l'altro medio.

Si possono presentare quattro casi.

1° caso – L'incognita *x* è *primo estremo* (e quindi anche *primo antecedente*)

$$x : b = c : d$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{b \cdot c}{d}$$

2° caso – L'incognita *x* è *secondo estremo* (e quindi anche *secondo conseguente*)

$$a : b = c : x$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

3° caso – L'incognita *x* è *primo medio* (e quindi anche *primo conseguente*)

$$a : x = c : d$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{a \cdot d}{c}$$

4° caso – L'incognita *x* è *secondo medio* (e quindi anche *secondo antecedente*)

$$a : b = x : d$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{a \cdot d}{b}$$

Il medio proporzionale
Se viene data una proporzione nella forma:

$$a : x = x : d$$

oppure nella forma:

$$x : b = c : x$$

che può essere sempre convertita (ricorda: "*il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli e-stremi*") nella forma:

$$b : x = x : c$$

si ottengono, rispettivamente le soluzioni:

$$x = \sqrt{a \cdot d} \quad \text{oppure} \quad x = \sqrt{b \cdot c}$$

La proprietà del comporre
Può capitare di dover risolvere un problema del tipo: *"La somma di due numeri è 50 e uno è i nove sedicesimi dell'altro. Trovare i due numeri"*; oppure, detto in altro modo: *"La somma di due numeri è 50 ed il loro rapporto è di nove sedicesimi. Trovare i due numeri".*
In questo caso è conveniente applicare la proprietà del comporre delle proporzioni.

Sia data la seguente proporzione:

$$(a - x) : x = a : b$$

Il primo evento consiste nell'eliminare l'incognita *x* dall'interno della parentesi.
Si parla di *proprietà del comporre* perché, per eliminare l'incognita x, si usa il *segno più* dell'addizione.

Si somma, a sinistra e a destra dell'uguale, un antecedente con il proprio conseguente:

$$(a - x + x) : x = (a + b) : b$$

ottenendo:

$$a : x = (a + b) : b$$

e quindi:

$$x = \frac{a \cdot b}{(a + b)}$$

Esempio
La somma di due numeri è 50 e uno è i nove sedicesimi dell'altro. Trovare i due numeri.
Risoluzione
Se uno dei due numeri è *x*, l'altro sarà *50 – x*.

$$(50 - x) : x = 9 : 16$$

$$(50 - x + x) : x = (9 + 16) : 16$$

$$50 : x = 25 : 16$$

$$x = \frac{50 \cdot 16}{25} = 2 \cdot 16 = 32$$

Quindi: $50 - x = 50 - 32 = 18$
Risposta: i due numeri sono **18** e **32**.

La proprietà dello scomporre
Può capitare di dover risolvere un problema del tipo: "*La differenza tra due numeri è 30 e uno è i nove quarti dell'altro. Trovare i due numeri*"; oppure, detto in altro modo: "*La differenza due numeri è 30 ed il loro rapporto è di nove quarti. Trovare i due numeri*".
In questo caso è conveniente applicare la proprietà dello scomporre delle proporzioni.

Sia data la seguente proporzione:

$$(a + x) : x = a : b$$

Il primo evento consiste nell'eliminare l'incognita *x* dall'interno della parentesi.
Si parla di *proprietà dello scomporre* perché, per eliminare l'incognita x, si usa il *segno meno* della sottrazione.
Si somma, a sinistra e a destra dell'uguale, un antecedente con il proprio conseguente:

$$(a + x - x) : x = (a - b) : b$$

ottenendo:

$$a : x = (a - b) : b$$

e quindi:

$$x = \frac{a \cdot b}{(a - b)}$$

Esempio
La differenza tra due numeri è 30 e uno è i nove quarti dell'altro. Trovare i due numeri.
Risoluzione
Se uno dei due numeri è *x*, l'altro sarà *30 + x*.

$$(30 + x) : x = 9 : 4$$

Nota.
Il numero più grande $30 + x$ sarà un antecedente, così come il 9.
Il numero più piccolo x sarà un conseguente, così come il 4.

$$(30 + x - x) : x = (9 - 4) : 4$$

$$30 : x = 5 : 4$$

$$x = \frac{30 \cdot 4}{5} = 6 \cdot 4 = 24$$

Quindi: $30 + x = 30 + 24 = 54$
Risposta: i due numeri sono **24** e **30**.

Da un numero decimale finito alla frazione corrispondente (e viceversa)

Sia data una *frazione* generica del tipo:

$$\frac{15}{4}$$

e la si trasformi nella *divisione corrispondente*:

$$15 : 4 = 3{,}75$$

Per quel che riguarda il *quoto* (cioè il risultato della divisione), si dice che "*il 3 è la parte intera*" e che "*0,75 è la parte decimale*".
Il numero 3,75 che esprime il quoto è un *numero decimale finito*.
La cifra che segue immediatamente a destra della virgola (il 7 nel nostro caso) è definita come "*decimo dell'intero*".
La cifra che segue di due posti a destra della virgola (il 5 nel nostro caso) è definita come "*centesimo dell'intero*".

Per *trasformare un numero decimale finito nella corrispondente frazione decimale* si opera come segue.

- si considera il numero (nel nostro caso 3,75) senza virgola (scrivendo 375) e lo si pone al numeratore della frazione;
- al denominatore si scrive la cifra 1 (*uno*), seguita da tanti zeri quante sono le cifre della parte decimale (nel nostro caso, gli zeri sono due);
- quindi si ottiene:

$$\frac{375}{100}$$

- se è il caso, si procede poi alla semplificazione, trasformando la frazione data in una frazione ridotta ai minimi termini:

$$\frac{375}{100} = \frac{75 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{25 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$$

come volevasi dimostrare.

Altri *esempi*:

$$4{,}2 = \frac{42}{10} = \frac{21 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{21}{5}$$

$$3{,}12 = \frac{312}{100} = \frac{156 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{156}{50} = \frac{78}{25}$$

Alcuni *esempi frequenti* (**da memorizzare**) e relativi alla parte decimale:

$$0{,}1 = \frac{1}{10}$$

$$0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0,3 = \frac{3}{10}$$

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$0,7 = \frac{7}{10}$$

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$0,9 = \frac{9}{10}$$

Mettendo i dati in una tabella riassuntiva, si ottiene:

0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$

Da un numero periodico senza antiperiodo alla frazione corrispondente (e viceversa)

Sia data una *frazione* generica del tipo:

$$\frac{16}{3}$$

e la si trasformi nella *divisione corrispondente*:

$$16 : 3 = 5{,}333333\ldots$$

dove *la cifra 3 si ripete all'infinito* o, come si dice, si ripete *in modo periodico*.
Per comodità, si usa però la seguente simbologia:

$$16 : 3 = 5{,}\overline{3}$$

e si legge: "*cinque virgola tre, con tre periodo*".
Poiché tra la virgola e la cifra 3 che si ripete non ci sono altre cifre diverse da 3, si dice che "*non c'è antiperiodo*".
Quindi $5{,}\overline{3}$ è un *numero periodico senza antiperiodo*.

Sia dato, per esempio, il numero $5{,}\overline{3}$ e lo si voglia trasformare nella frazione corrispondente.
Si opera nel modo seguente:

- si considera il numero (nel nostro caso $5{,}\overline{3}$) senza virgola e senza segno di periodo soprassegnato (scrivendo 53) e lo si pone al numeratore della frazione;
- da questo numero (53) si sottrae la parte intera (il 5, cioè "*ciò che non è periodo*") e si calcola la differenza;
- al denominatore si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo (nel nostro caso un solo 9, perché nel periodo c'è solo la cifra 3 che si ripete);
- quindi si ottiene:
$$5{,}\overline{3} = \frac{53-5}{9} = \frac{48}{9}$$
- se è il caso, si procede poi alla semplificazione, trasformando la frazione data in una frazione ridotta ai minimi termini:
$$\frac{48}{9} = \frac{16\cdot 3}{3\cdot 3} = \frac{16}{3}$$

come volevasi dimostrare.

Altri *esempi*:

$$2{,}\overline{43} = \frac{243-2}{99} = \frac{241}{99}$$

$$3{,}\overline{12} = \frac{312-3}{99} = \frac{309}{99} = \frac{103\cdot 3}{33\cdot 3} = \frac{103}{33}$$

Alcuni *esempi frequenti* (**da memorizzare**) e relativi alla parte decimale:

$$0{,}\overline{1} = \frac{1}{9}$$

$$0{,}\overline{2} = \frac{2}{9}$$

$$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,\overline{4} = \frac{4}{9}$$

$$0,\overline{5} = \frac{5}{9}$$

$$0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$0,\overline{7} = \frac{7}{9}$$

$$0,\overline{8} = \frac{8}{9}$$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Mettendo i dati in una tabella riassuntiva, si ottiene:

$0,\overline{1}$	$0,\overline{2}$	$0,\overline{3}$	$0,\overline{4}$	$0,\overline{5}$	$0,\overline{6}$	$0,\overline{7}$	$0,\overline{8}$	$0,\overline{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	1

I numeri periodici sono piuttosto comuni nei calcoli sessagesimali:

- nella conversione delle ampiezze angolari da gradi, a minuti primi, a minuti secondi (e viceversa);
- nella conversione dei tempi da ore, a minuti primi, a secondi (e viceversa);
- nel calcolo della longitudine locale rispetto al meridiano fondamentale di Greenwich;
- nel calcolo del tempo del meridiano di Greenwich (TMG) rispetto al passaggio del Sole in culminazione sul meridiano locale.

Da un numero periodico con antiperiodo alla frazione corrispondente (e viceversa)

Sia dato il numero $2{,}34444\ldots$ con il 4 che si ripete in modo periodico, all'infinito.
Questo numero può essere scritto nella forma:

$$2{,}34444\ldots = 2{,}3\overline{4}$$

e si legge "*due virgola tenta quattro, con quattro periodo*".
La cifra *3*, che sta tra la virgola ed il periodo, non si ripete e viene detta *antiperiodo*.
La *parte intera* (il *2*) e l'*antiperiodo* (il *3*) costituiscono, nel loro insieme (*23*) "*tutto ciò che non è periodo*".

Quindi $2{,}3\overline{4}$ è un *numero periodico con antiperiodo*.

Sia dato, per esempio, il numero $2{,}3\overline{4}$ e lo si voglia trasformare nella frazione corrispondente.
Si opera nel modo seguente:

- si considera il numero (nel nostro caso $2{,}3\overline{4}$) senza virgola e senza segno di periodo soprassegnato (scrivendo 234) e lo si pone al numeratore della frazione;
- da questo numero (234) si sottrae "*tutto ciò che non è periodo*" (23) e si calcola la differenza;
- al denominatore si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo (nel nostro caso un solo 9, perché nel periodo c'è solo la cifra 3 che si ripete) e tanti zero quante sono le cifre dell'antiperiodo (e, nel nostro caso, c'è un solo zero);
- quindi si ottiene:

$$2{,}3\overline{4} = \frac{234-23}{90} = \frac{211}{90} = 2{,}34444\ldots$$

come volevasi dimostrare.

- se è il caso, si procede poi alla semplificazione, trasformando la frazione data in una frazione ridotta ai minimi termini.

Esempio

$$4{,}3\overline{47} = \frac{4347-43}{990} = \frac{4304}{990} = \frac{2152}{495} = 4{,}34747474747\ldots.$$

come volevasi dimostrare.

Numeri in notazione scientifica (o notazione esponenziale)

Le potenze di 10 ed i numeri decimali corrispondenti

Si abbia il numero 1.
Questo numero può essere riscritto nel modo seguente:

$$1 = 1 \cdot 10^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Si abbia il numero 100000.
Questo numero può essere riscritto nel modo seguente:

$$100000 = 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1 \cdot 10^5 = 10^5$$

Si abbia il numero 0,001.
Questo numero può essere riscritto nel modo seguente:

$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

Si abbia il numero 0,00001.
Questo numero può essere riscritto nel modo seguente:

$$0{,}00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$$

Possiamo riassumere il tutto, in modo ordinato, nelle seguenti tabelle.

Numeri uguali a uno, o maggiori di uno

numero	… che si legge	10^n	simbolo	significato
1000000000000	mille miliardi	10^{12}	T	*tera*
100000000000	cento miliardi	10^{11}		
10000000000	dieci miliardi	10^{10}		
1000000000	un miliardo	10^9	G	*giga*
100000000	cento milioni	10^8		
10000000	dieci milioni	10^7		
1000000	un milione	10^6	M	*mega*
100000	centomila	10^5		
10000	diecimila	10^4		
1000	mille	10^3	k	*chilo*
100	cento	10^2	h	*etto*
10	dieci	10^1	da	*deca*
1	uno	10^0		

Numeri uguali a uno, o minori di uno

numero	frazione	… che si legge	10^n	simbolo	significato
1	$\frac{1}{1}$	uno	10^0		
0,1	$\frac{1}{10}$	un decimo	10^{-1}	d	*deci*
0,01	$\frac{1}{100}$	un centesimo	10^{-2}	c	*centi*
0,001	$\frac{1}{1000}$	un millesimo	10^{-3}	m	*milli*
0,0001	$\frac{1}{10000}$	un decimillesimo	10^{-4}		
0,00001	$\frac{1}{100000}$	un centimillesimo	10^{-5}		
0,000001	$\frac{1}{1000000}$	un milionesimo	10^{-6}	μ	*micro*
0,0000001	$\frac{1}{10000000}$	un decimilionesimo	10^{-7}		
0,00000001	$\frac{1}{100000000}$	un centimilionesimo	10^{-8}		
0,000000001	$\frac{1}{1000000000}$	un miliardesimo	10^{-9}	n	*nano*
0,0000000001	$\frac{1}{10000000000}$		10^{-10}		
0,00000000001	$\frac{1}{100000000000}$		10^{-11}		
0,000000000001	$\frac{1}{1000000000000}$		10^{-12}	p	*pico*

Trasformazione di un numero qualsiasi, maggiore di uno, in notazione esponenziale

Osserviamo i seguenti numeri maggiori di uno e le loro trasformazioni equivalenti in notazione esponenziale.

$$2{,}5 = 2{,}5 \cdot 10^0 = 2{,}5 \cdot 1$$

$$25 = 2{,}5 \cdot 10^1$$

$$250 = 2{,}5 \cdot 10^2$$

$$2500 = 2{,}5 \cdot 10^3$$

$$25000 = 2{,}5 \cdot 10^4$$

Prendendo lo spunto dai nostri esempi, si opera nel modo seguente:

- si scrive la prima cifra del numero

  2

- si scrive la *virgola*

  2,

- si scrivono, in sequenza, tutte le cifre che non siano gli zeri (più o meno numerosi) che completano il numero

  2,5

- si moltiplica questo numero per 10^n

  $2{,}5 \cdot 10^n$

- dove il numero *n* identifica quello delle cifre poste tra la posizione in cui si trova la virgola e la fine del numero (all'estrema destra);

Alcuni *esempi*

$$25000000 = 2{,}5 \cdot 10^7$$

$$1204000000 = 1{,}204 \cdot 10^9$$

In *Astronomia*: nel vuoto la luce viaggia alla velocità di c = 300000 km/s.

$$c = 300000\ km/s = 3{,}0 \cdot 10^5\ km/s$$

In *Astronomia*: l'unità astronomica (U.A.) è la distanza media Terra – Sole ed equivale a centocinquanta milioni di chilometri.

$$1\ U.A. = 150000000\ km = 1{,}5 \cdot 10^8\ km$$

Trasformazione di un numero qualsiasi, minore di uno, in notazione esponenziale

Osserviamo i seguenti numeri minori di uno e le loro trasformazioni equivalenti in notazione esponenziale.

$$0{,}25 = 2{,}5 \cdot 10^{-1}$$

$$0{,}025 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$$

$$0{,}0025 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$$

$$0{,}00025 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Si voglia trasformare il numero 0,000000123 nella corrispondente notazione esponenziale.
Si opera nel modo seguente:

- si scrive, come un numero, la serie di cifre che si trovano a destra di tutti gli zeri:

123

- si scrive la virgola dopo la prima cifra di questo numero:

1,23

- si moltiplica questo numero per 10^{-n}

$$1{,}23 \cdot 10^{-n}$$

- dove il numero *n* identifica il numero degli zeri presenti nella parte sinistra del numero che viene trasformato (compreso lo zero della parte intera);
- nel nostro caso *n* = 7;
- si mette il segno meno davanti ad *n*, perché ci spostiamo da destra verso sinistra per contare gli zeri;
- quindi il numero dato viene trasformato così:

$$0{,}000000123 = 1{,}23 \cdot 10^{-7}$$

Alcuni esempi di moltiplicazioni e/o divisioni tra numeri molto grandi e numeri molto piccoli.

$$\frac{25000000}{0{,}0002} = \frac{2{,}5 \cdot 10^7}{2{,}0 \cdot 10^{-4}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^7 \cdot 10^4}{2{,}0} = 1{,}25 \cdot 10^{11}$$

$$125000000 \cdot 0{,}00008 = 1{,}25 \cdot 10^8 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-5} = 1{,}25 \cdot 8{,}0 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^3 = 10^4$$

Si ricordino alcuni casi particolari:

$$0{,}5 \cdot 2 = 5{,}0 \cdot 10^{-1} \cdot 2 = 10 \cdot 10^{-1} = 10^0 = 1$$

$$0{,}2 \cdot 5 = 2{,}0 \cdot 10^{-1} \cdot 5 = 10 \cdot 10^{-1} = 10^0 = 1$$

$$0{,}25 \cdot 4 = 2{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 4 = 10 \cdot 10^{-1} = 10^0 = 1$$

$$0{,}4 \cdot 25 = 4{,}0 \cdot 10^{-1} \cdot 2{,}5 \cdot 10^1 = 10 \cdot 10^{-1+1} = 10 \cdot 10^0 = 10 \cdot 1 = 10$$

$$1{,}25 \cdot 8 = 10$$

Le equivalenze

Le *equivalenze* sono delle *particolari forme di uguaglianze logich*e che permettono di confrontare e convertire valori “grandi” e/o valori “piccoli” di grandezze omogenee.
Le *grandezze omogenee* sono delle *proprietà mis*urabili, confrontabili tra di loro.
E’ chiaro che *le grandezze omogenee devono essere dello stesso tipo*.

Potrò, ad esempio, confrontare:
- lunghezze lineari con lunghezze lineari;
- superfici con superfici;
- volumi con volumi;
- capacità con capacità (espresse in litri, per i fluidi, cioè liquidi ed aeriformi);
- tempi con tempi;
- masse con masse;
- forze con forze;
- … ecc

Non avrà alcun senso logico confrontare tra loro delle grandezze non omogenee.
Ad esempio, che senso potrebbe mai avere una frase del tipo: “*ho misurato con il cronometro* (grandezza fisica misurata: tempo) *lo spazio occupato da una manciata di sabbia* (grandezza fisica misurata: volume)”?

Dal confronto tra grandezze omogenee (e questo lo abbiamo sperimentato fin dalla prima infanzia) derivano tre concetti: *minore*, *uguale*, *maggiore*.

Per svolgere questo argomento e gli esercizi collegati si farà riferimento a quanto è stato trattato in precedenza e, soprattutto :
- alle quattro operazioni fondamentali;
- alle frazioni;
- alle potenze;
- alle proporzioni;
- alla notazione esponenziale di un numero.

Le misure lineari (multipli e sottomultipli del metro)

numero	10^n	simbolo	significato
1000	10^3	km	*chilometro*
100	10^2	hm	*ettometro*
10	10^1	dam	*decametro*
1	10^0	m	*metro*
0,1	10^{-1}	dm	*decimetro*
0,01	10^{-2}	cm	*centimetro*
0,001	10^{-3}	mm	*millimetro*
…..	…..	…..	…..
0,000001	10^{-6}	μm	*micrometro o micron*
…..	…..	…..	…..
0,000000001	10^{-9}	nm	*nanometro*
…..	…..	…..	…..
0,000000000001	10^{-12}	pm	*picometro*

Nel Sistema Internazionale, ***l'unità di misura delle lunghezze è il metro***.

Nota importante.
Quando si salta *da un* ***ordine di grandezza*** *ad un altro* **nella misura delle lunghezze**, ***l'esponente della base 10 varia di uno in uno***.

Esempio n. 1 (misure lineari) – da "grandi dimensioni" a "piccole dimensioni"

$$3000\ km = \boldsymbol{x}\ mm$$

Si ricordi che $3000 = 3 \cdot 10^3$, $k = 10^3$ e che $m = 10^{-3}$.
Quindi:

$$3 \cdot 10^3 \cdot 10^3\ m = \boldsymbol{x}\ 10^{-3}\ m$$

Considerando tutti i termini dell'uguaglianza come se fossero dei fattori, si operano le opportune semplificazioni:

$$3 \cdot 10^3 \cdot 10^3\ m = \boldsymbol{x}\ 10^{-3}\ m$$

$$3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = \boldsymbol{x}\ 10^{-3}$$

Per *calcolare il valore dell'incognita x*, posso lavorare in due modi:

- *modo a* – divido entrambi i numeri dell'uguaglianza per il fattore che sta vicino alla x, cioè 10^{-3}; successivamente eseguo le opportune semplificazioni, applicando le regole delle potenze ai termini in base 10.

$$3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = \boldsymbol{x}\ 10^{-3}$$

$$\frac{3 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{10^{-3}} = \boldsymbol{x}$$

$$3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = \boldsymbol{x}$$

$$3 \cdot 10^9 = \boldsymbol{x}$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$3000\ km = \mathbf{3 \cdot 10^9}\ mm$$

- *modo b* – trasporto a sinistra il fattore che sta vicino alla x, cioè 10^{-3}; nel fare questo, devo pero cambiare il segno del suo esponente, per cui mi diventa 10^3; successivamente eseguo le opportune semplificazioni, applicando le regole delle potenze ai termini in base 10.

$$3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = \boldsymbol{x}\ 10^{-3}$$

$$3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = \boldsymbol{x}$$

$$3 \cdot 10^9 = \boldsymbol{x}$$

Quindi scriveremo ancora, come risultato finale:

$$3000\ km = \mathbf{3 \cdot 10^9}\ mm$$

Si noti infatti che esiste la seguente *procedura operativa passo-passo*:

$$3000\ km = \ 30000\ hm$$

$$30000\ hm = \ 300000\ dam$$

$$300000\ dam = \ 3000000\ m$$

$$3000000\ m = \ 30000000\ dm$$

$$30000000\ dm = 300000000\ cm$$

$$300000000\ cm = 3000000000\ mm$$

Infine trasformiamo il valore 3000000000 nella corrispondente notazione esponenziale:

$$\mathbf{3000000000 = 3,0 \cdot 10^9}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio n. 2 (misure lineari) – da “piccole dimensioni” a “grandi dimensioni”

$$30\ cm = \boldsymbol{x}\ hm$$

Si ricordi che $30 = 3 \cdot 10^1$, $c = 10^{-2}$ e che $h = 10^2$.
Quindi:

$$3 \cdot 10\ \cdot 10^{-2}\ m = \boldsymbol{x}\ 10^2\ m$$

$$3 \cdot 10^{-1} = \boldsymbol{x}\ 10^2$$

$$3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = \boldsymbol{x}$$

$$3 \cdot 10^{-3} = \boldsymbol{x}$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$30\ cm = \mathbf{3 \cdot 10^{-3}}\ hm$$

Si noti infatti che esiste la seguente *procedura operativa passo-passo*:

$$30\ cm = 3\ dm$$

$$3\ dm = 0,3\ m$$

$$0,3\ m = 0,03\ dam$$

$$0,03\ dam = 0,003\ hm$$

Infine trasformiamo il valore $0,003$ nella corrispondente notazione esponenziale:

$$\mathbf{0,003} = \mathbf{3,0 \cdot 10^{-3}}$$

come volevasi dimostrare.

Le misure di superficie (multipli e sottomultipli del metro quadrato)

numero in m	$\boldsymbol{lato\ del\ quadrato\ 10^n}$	$\boldsymbol{area\ 10^{2n}}$	**simbolo**	**significato**
1000	10^3	10^6	km^2	*chilometro quadrato*
100	10^2	10^4	hm^2	*ettometro quadrato*
10	10^1	10^2	dam^2	*decametro quadrato*
1	10^0	10^0	m^2	*metro quadrato*
0,1	10^{-1}	10^{-2}	dm^2	*decimetro quadrato*
0,01	10^{-2}	10^{-4}	cm^2	*centimetro quadrato*
0,001	10^{-3}	10^{-6}	mm^2	*millimetro quadrato*
…..	…..	…..	…..	…..
0,000001	10^{-6}	10^{-12}	μm^2	*micron quadrato*

L’area è la misura di una superficie.

Nel Sistema Internazionale, ***l’unità di misura delle aree è il metro quadrato***.

L’area di un metro quadrato è definita dalla simbologia:

$$1\ m^2$$

ed è equivalente a quella racchiusa, nel piano, da un quadrato di lato unitario (*1 m*).
Infatti, “*moltiplicando base per altezza*”, si ottiene:

$$1\ m \cdot 1\ m = 1\ m^2$$

Nota importante.
Quando si salta *da un* ***ordine di grandezza*** *ad un altro* **nella misura delle aree**, ***l’esponente della base 10 varia di due in due***.
Infatti moltiplicando tra loro le dimensioni dei due lati del nostro quadrato si otterranno sempre delle potenze di grado pari.

Esempio n. 1 (misure di superficie) – da “grandi dimensioni” a “piccole dimensioni”

$$400\ hm^2 = x\ dm^2$$

Si ricordi che $400 = 4 \cdot 10^2$, e per le aree, si ha che $h = 10^4$ e $d = 10^{-2}$.
Quindi:

$$4 \cdot 10^2 \cdot 10^4\ m^2 = x\ \cdot 10^{-2}\ m^2$$

si semplificano i termini uguali:

$$4 \cdot 10^6\ = x\ \cdot 10^{-2}$$

si trasporta, dalla altra parte, cambiandone il segno, la potenza di dieci del fattore vicino all’incognita x:

$$4 \cdot 10^6 \cdot 10^2\ = x$$

e si ottiene:

$$\boldsymbol{4 \cdot 10^8\ = x}$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$400\ hm^2 = \mathbf{4 \cdot 10^8}\ dm^2$$

Si noti infatti che esiste la seguente *procedura operativa passo-passo*:

$$400\ hm^2 = 40000\ dam^2$$

$$40000\ dam^2 = 4000000\ m^2$$

$$4000000\ m^2 = 400000000\ dm^2$$

Infine trasformiamo il valore 400000000 nella corrispondente notazione esponenziale:

$$\mathbf{400000000 = 4,0 \cdot 10^8}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio n. 2 (misure di superficie) – da “piccole dimensioni” a “grandi dimensioni”

$$360000\ mm^2 = x\ dam^2$$

Si ricordi che $360000 = 3{,}6 \cdot 10^5$, e per le aree, si ha che $m = 10^{-6}$ e $da = 10^2$.
Quindi:

$$3{,}6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6}\ m^2 = x \cdot 10^2\ m^2$$

Si semplificano i termini uguali e si semplificano le potenze di 10 a sinistra dell’uguale:

$$3{,}6 \cdot 10^{-1} = x \cdot 10^2$$

Si trasporta, dalla altra parte, cambiandone il segno, la potenza di dieci del fattore vicino all’incognita x:

$$3{,}6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = x$$

E si ottiene:

$$\mathbf{3,6 \cdot 10^{-3} = x}$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$360000\ mm^2 = \mathbf{3,6 \cdot 10^{-3}}\ dam^2$$

Si noti infatti che esiste la seguente *procedura operativa passo-passo*:

$$360000\ mm^2 = 3600\ cm^2$$

$$3600\ cm^2 = 36\ dm^2$$

$$36\ dm^2 = 0{,}36\ m^2$$

$$0{,}36\ m^2 = 0{,}0036\ dam^2$$

Infine trasformiamo il valore 0,0036 nella corrispondente notazione esponenziale:

$$\mathbf{0,0036 = 3,6 \cdot 10^{-3}}$$

come volevasi dimostrare.

Le misure di volume (multipli e sottomultipli del metro cubo)

numero in m	$\boldsymbol{spigolo\ del\ cubo\ 10^{n}}$	$\boldsymbol{volume\ 10^{3n}}$	**simbolo**	**significato**
1000	10^{3}	10^{9}	km^{3}	*chilometro cubo*
100	10^{2}	10^{6}	hm^{3}	*ettometro cubo*
10	10^{1}	10^{3}	dam^{3}	*decametro cubo*
1	10^{0}	10^{0}	m^{3}	*metro cubo*
0,1	10^{-1}	10^{-3}	dm^{3}	*decimetro cubo*
0,01	10^{-2}	10^{-6}	cm^{3}	*centimetro cubo*
0,001	10^{-3}	10^{-9}	mm^{3}	*millimetro cubo*

Nel Sistema Internazionale, ***l'unità di misura dei volumi è il metro cubo***.

Il volume di un metro cubo è definito dalla simbologia:

$$1\ m^{3}$$

ed è equivalente a quello racchiuso, nello spazio tridimensionale, da un cubo di spigolo unitario (*1 m*).
Infatti, "*moltiplicando area della base per l'altezza*", si ottiene:

$$1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m = 1\ m^{3}$$

Nota importante.
Quando si salta *da un* ***ordine di grandezza*** *ad un altro* ***nella misura dei volumi***, ***l'esponente della base 10 varia di tre in tre***.
Ad cubo che ha uno spigolo di dimensione $\boldsymbol{10^{n}}$, corrisponderà sempre il volume di un cubo di dimensione $\boldsymbol{10^{3n}}$.
Infatti moltiplicando tra loro le dimensioni dei tre spigoli del nostro cubo si otterranno sempre e comunque delle potenze di grado dispari e multiple di 3.

Esempio n. 1 (misure di volume) – da "grandi dimensioni" a "piccole dimensioni"

$$400\ dam^{3} = x\ dm^{3}$$

Si ricordi che $400 = 4 \cdot 10^{2}$, e per i volumi, si ha che $da = 10^{3}$ e $d = 10^{-3}$.
Quindi:

$$4 \cdot 10^{2} \cdot 10^{3}\ m^{3} = x\ \cdot 10^{-3}\ m^{3}$$

si semplificano i termini uguali:

$$4 \cdot 10^{5}\ = x\ \cdot 10^{-3}$$

si trasporta, dalla altra parte, cambiandone il segno, la potenza di dieci del fattore vicino all'incognita x:

$$4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \ = x$$

e si ottiene:

$$\mathbf{4 \cdot 10^8 \ = x}$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$\mathbf{400\ dam^3 = 4 \cdot 10^8\ dm^3}$$

Si noti infatti che esiste la seguente *procedura operativa passo-passo*:

$$400\ dam^3 = \ 400000\ m^3$$

$$400000\ m^3 = \ 400000000\ dm^3$$

Infine trasformiamo il valore 400000000 nella corrispondente notazione esponenziale:

$$\mathbf{400000000 = 4 \cdot 10^8}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio n. 2 (misure di volume) – da "piccole dimensioni" a "grandi dimensioni"

$$350000\ mm^3 = x\ m^3$$

Si ricordi che $350000 = 3{,}5 \cdot 10^5$, e per i volumi, si ha che $m = 10^{-9}$.
In questo caso, a destra dell'uguale, non c'è alcun prefisso davanti al simbolo del m^3.
Pertanto utilizzeremo la simbologia (che può essere tranquillamente sottintesa): $10^0 = 1$.
Quindi:

$$3{,}5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-9}\ m^3 = x \cdot 10^0\ m^3$$

$$3{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^3 = x\ \cdot 1\ m^3$$

si semplificano i termini uguali e si ottiene:

$$3{,}5 \cdot 10^{-4} \ = x$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$350000\ mm^3 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^3$$

Si noti infatti che esiste la seguente *procedura operativa passo-passo*:

$$350000\ mm^3 = \ 350\ cm^3$$

$$350\ cm^3 = \ 0{,}350\ dm^3$$

$$0{,}350\ dm^3 = 0{,}00035\ m^3$$

Infine trasformiamo il valore $0{,}00035$ nella corrispondente notazione esponenziale:

$$\mathbf{0{,}00035 = 3{,}5 \cdot 10^{-4}}$$

come volevasi dimostrare.

I volumi espressi come *capacità*

Spesso nella via quotidiana, ma anche nell'ambito dei laboratori di ricerca, dovendo trattare con fluidi (liquidi e/o aeriformi) o soluzioni, al posto di utilizzare le misure dei volumi espressi in m^3 ed eventuali sottomultipli, si ricorre al termine di *capacità*.
Per esempio, lavoriamo trattando: litri, ettolitri, centimetri cubi, centilitri, decilitri, millilitri, c.c. (= centimetri cubi). Succede anche che risultino difficili le conversioni da attivare.

Le misure di volume espresse come *capacità* (multipli e sottomultipli del litro)

simbolo volume	significato	capacità	simbolo	
km^3	*chilometro cubo*			
hm^3	*ettometro cubo*			
$1000\ m^3 = 1\ dam^3$	*decametro cubo*			
$100\ m^3$		1000 ettolitri		
$10\ m^3$		100 ettolitri		
m^3	*metro cubo*	10 ettolitri		
$100\ dm^3$		ettolitro	hL	100 L
$10\ dm^3$		decalitro	daL	10 L
$1\ dm^3$	*decimetro cubo*	litro	L	
$10^{-1}\ dm^3$		decilitro	dL	$10^{-1}\ L$
$10^{-2}\ dm^3$		centilitro	cL	$10^{-2}\ L$
$10^{-3}\ dm^3 = 1cm^3$	*centimetro cubo*	millilitro	mL	$10^{-3}\ L$
$10^{-3}\ dm^3 = 1\ mm^3$	*millimetro cubo*	microlitro	μL	$10^{-6}\ L$

***Il litro è l'unità di misura dei volumi* espressi come *capacità*.**
Il simbolo del litro è L ("*elle maiuscolo*") e non ℓ ("*elle minuscolo*").

Esempio n. 1 (misure di volume e capacità) – da "grandi dimensioni" a "piccole dimensioni"

$$250\ m^3 = x\ hL$$

Si sa che: $250 = 2{,}5 \cdot 10^2$; $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^3 L$; $h = 10^2$.

Quindi:

$$250\ m^3 = x\ hL$$

$$2{,}5 \cdot 10^2 \cdot 10^3\ dm^3 = x\ \cdot 10^2 \cdot L$$

si semplificano i termini uguali e quelli equivalenti (dm^3 e L) e si ottiene:

$$\mathbf{2,5 \cdot 10^3 = x}$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$\mathbf{250\ m^3 = 2,5 \cdot 10^3\ hL}$$

Esempio n. 2 (misure di volume e capacità) – da "grandi dimensioni" a "piccole dimensioni"

$$32\ dm^3 = x\ cL$$

Si sa che: 1 $dm^3 = 1\ L$; $c = 10^{-2}$.

Quindi:

$$32\ dm^3 = x\ cL$$

$$32\ \cdot L = x\ \cdot 10^{-2} \cdot L$$

si semplificano i termini equivalenti (dm^3 e L) e si ottiene:

$$32 = x\ \cdot 10^{-2}$$

$$32 \cdot 10^2 = x$$

$$3{,}2 \cdot 10^1 \cdot 10^2 = x$$

$$3{,}2 \cdot 10^3 = x$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$\mathbf{32\ dm^3 = 3{,}2 \cdot 10^3\ cL}$$

Esempio n. 3 (misure di volume e capacità) – da "piccole dimensioni" a "grandi dimensioni"

$$450\ cm^3 = x\ dL$$

Si sa che: $450 = 4{,}5 \cdot 10^2$; $1\ dm^3 = 1\ L$; $1\ cm^3 = 10^{-3}\ L$; $1\ dL = 10^{-1}\ L$.
Quindi:

$$4{,}5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3}\ L = x \cdot\ 10^{-1}\ L$$

$$4{,}5 \cdot 10^{-1}\ L = x \cdot\ 10^{-1}\ L$$

si semplificano i termini equivalenti e si ottiene:

$$4{,}5 = x$$

Quindi scriveremo, come risultato finale:

$$\mathbf{450\ cm^3 = 4{,}5\ dL}$$

Il tempo

Nel Sistema Internazionale, ***l'unità di misura tempo è il secondo***.
Il simbolo del secondo è *s* (e non sec).
Il **secondo** è considerato la **86400.ma** (ottantaseimilaquattrocentesima) **parte del giorno solare medio**.
Il **giorno solare medio** (quello che misuriamo comunemente con il nostro orologio) è costituito da **24 ore**.
Ogni **ora** (simbolo **h**) è costituito da **60 minuti primi** (o ***minuti***).
Ogni **minuto primo** (simbolo **m**) è costituito da **60 minuti secondi** (o ***secondi***).
In un'ora ci sono 3600 secondi: **1 h = 3600 s**.
Questa è detta **numerazione sessagesimale**, o "**su base 60**".
Le **frazioni di secondo** (decimi, centesimi, millesimi) vengono però **valutate su base decimale**.

Tabella di conversione dei tempi

	costituito/a da
1 giorno	24 ore
1 ora	60 minuti primi (o minuti)
1 minuto primo (o *minuto*)	60 minuti secondi (o secondi)
1 minuto secondo (o *secondo*)	10/10 di secondo
1/10 di secondo	10/100 di secondo
1/100 di secondo	10/1000 di secondo
1/1000 di secondo	….

Esempio n. 1
Trasformare in secondi il tempo di: 3h 27m 41s.

$$(3 \cdot 3600 + 27 \cdot 60 + 41)s = (10800 + 1620 + 41)\ s = \boldsymbol{12461\ s}$$

Esempio n. 2
Il **giorno siderale** (o **sidereo**) equivale a **23h 56m e 4s**: è il tempo che un meridiano terrestre impiega per riallinearsi con una stella lontana, esterna al Sistema Solare, dopo che la Terra ha eseguito una rotazione completa di 360° sul suo asse.
Questo valore **è sempre costante**. Trasformare questo tempo in secondi.

$$(23 \cdot 3600 + 56 \cdot 60 + 4)s = (82800 + 3360 + 4)\ s = \boldsymbol{86164\ s}$$

Esempio n. 3
Trasformare 56m 42s in una frazione di minuti primi.

$$56m + \frac{43}{60}m = \left(56 + \frac{43}{60}\right)m = \left(\frac{56 \cdot 60 + 43}{60}\right)m = \left(\frac{3403}{60}\right)m = 56{,}71\bar{6}\,m$$

Esempio n. 4
Trasformare il tempo 13,4$\bar{3}$h in h, m, s.

Si opera nel modo seguente:
si prende la parte intera (**13h**) del numero 13,4$\bar{3}$;

si calcola la parte decimale:

$$13{,}4\overline{3} - 13 = 0{,}4\overline{3}$$

si trasforma la parte decimale nella corrispondente frazione (attenzione alla parte periodica e antiperiodica):

$$0{,}4\overline{3} = \frac{43-4}{90} = \frac{39}{90} = \frac{13}{30}$$

si moltiplica la frazione per 60 (dobbiamo trovare dei minuti!):

$$\left(\frac{13}{30} \cdot 60\right) m = 26\, m$$

Avendo terminato tutte le operazioni, possiamo dire che vale questa equivalenza:

$$13{,}4\overline{3}\ h = 13h\ 26m$$

Esempio n. 5
Il **mese sinodico** o **lunazione** è il tempo che ci impiega un punto della superficie lunare per allinearsi con il centro della Terra e con il centro del Sole. Viene utilizzato per definire le varie fasi lunari, e le date delle eclissi di Sole e delle eclissi di Luna.
Il mese sinodico vale **29d 12h 44m 3s**.

Trasformare questo tempo, esprimendolo in forma decimale rispetto ai giorni.
Si opera nel modo seguente:

$$\left(29 + \frac{12}{24} + \frac{44}{24 \cdot 60} + \frac{3}{86400}\right) d = \left(29 + \frac{1}{2} + \frac{44}{1440} + \frac{3}{86400}\right) d =$$

$$= \left(29{,}5 + \frac{44}{1440} + \frac{3}{86400}\right) d = \left(\frac{29{,}5 \cdot 86400 + 44 \cdot 60 + 3}{86400}\right) d =$$

$$= \left(\frac{2548800 + 2640 + 3}{86400}\right) d = \left(\frac{2551443}{86400}\right) d = 29{,}53059\ d$$

Quindi il mese sinodico vale:

$$\boldsymbol{29d\ 12h\ 44m\ 3s = 29{,}53059\ d}$$

Esempio n. 6
L'**anno tropico** o **anno solare** è l'intervallo di tempo tra due ritorni consecutivi del Sole nel suo punto gamma o punto equinoziale di primavera.
L'anno tropico vale 365d 5h 48m 46s.

Trasformare questo tempo, esprimendolo in forma decimale rispetto ai giorni.
Si opera nel modo seguente:

$$\left(365 + \frac{5}{24} + \frac{48}{24 \cdot 60} + \frac{46}{86400}\right) =$$

$$= \left(\frac{365 \cdot 86400 + 5 \cdot 3600 + 48 \cdot 60 + 46}{86400}\right) d =$$

$$= \left(\frac{31536000 + 18000 + 2880 + 46}{86400}\right) d =$$

$$= \left(\frac{31556926}{86400}\right) d = 365{,}242199\ d$$

Quindi l'**anno solare** vale:

$$\mathbf{365d\ 5h\ 48m\ 46s} = \mathbf{365{,}242199}\ \boldsymbol{d}$$

Esempio n. 7
Nel V secolo a.C., l'astronomo greco **Metone** (raccogliendo anche i dati degli astronomi egiziani, Fenici o della Mesopotamia) aveva scoperto e definito che **le eclissi di Sole e/o di Luna si ripetevano praticamente ogni 235 lunazioni**, per i punti che si trovano su uno stesso meridiano, ma a latitudini diverse. Questo è il **ciclo metonico**.
L'errore, calcolato dagli astronomi moderni, è inferiore alle due ore!
Verificare a quanti anni terresti corrisponde questo periodo.

Poiché ci interessano i rapporti tra Terra, Sole e Luna consideriamo:
- l'anno solare (tropico) di $\mathbf{365{,}242199}\ \boldsymbol{d}$;
- il mese sinodico o lunazione di $\mathbf{29{,}53059}\ \boldsymbol{d}$.

In un anno tropico ci sono:

$$\left(\frac{\mathbf{365{,}242199}}{\mathbf{29{,}53059}}\right) \frac{lunazioni}{anno\ tropico} = \mathbf{12{,}368266}\ \frac{lunazioni}{anno\ tropico}$$

Quindi il ciclo metonico vale:

$$\left(\frac{235}{12{,}368266}\right)\ anni\ tropici = \mathbf{19{,}000238}\ anni\ tropici$$

La velocità: da m/s a km/h (e viceversa)

La **velocità** (media) è una **grandezza fisica**, **derivata** dal ***rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrere questo spazio***.
Nel Sistema Internazionale, la velocità viene espressa in "***metri al secondo***", con la simbologia:

$$v = \frac{m}{s}$$

Nella pratica, capita spesso di dover usare la velocità espressa in km/h, cioè in "**chilometri all'ora**" e ci risulta abbastanza difficile eseguire una veloce trasformazione dal Sistema Internazionale al sistema pratico.
E… lasciamo perdere il calcolo in yard/s o miglia/h!
E' però sufficiente ricordare che:

$$1\ km = 1000\ m$$

$$1\ h = 3600\ s$$

Esempio 1 **– da km/h a m/s**
Si trasformino 72 km/h nel valore corrispondente in m/s.
Nota. **Per passare da km/h a m/s si divide il valore per 3,6**.

Si una la seguente proporzione:

$$\frac{72\ km}{1\ h} = \frac{x\ m}{1\ s}$$

$$\frac{72000\ m}{3600\ s} = \frac{x\ m}{1\ s}$$

$$\frac{72000}{3600} = x$$

$$x = \frac{72}{3{,}6} = 20$$

Risposta: **72 km/h corrispondono a 20 m/s**.

Esempio 2 **– da m/s a km/h**
Si trasformino 35 m/s nel valore corrispondente in km/h.
Nota. **Per passare da m/s a km/h si moltiplica il valore per 3,6**.

Si una la seguente proporzione:

$$\frac{x\ km}{1\ h} = \frac{35\ m}{1\ s}$$

$$\frac{x\ \cdot 1000\ m}{3600\ s} = \frac{35\ m}{1\ s}$$

$$\frac{x}{3{,}6} = 35$$

$$x = 35 \cdot 3{,}6 = 126$$

Risposta: **35 m/s corrispondono a 126 km/h**.

Tabella di conversione rapida da m/s a km/h (e viceversa)

m/s	km/h
0,5	1,8
1	3,6
2	7,2
3	10,8
4	14,4
5	18,0
6	21,6
8	28,8
7	25,2
9	32,4
10	36,0
20	72,0
25	90,0
30	108,0
35	126,0
40	144,0
45	162,0
50	180,0
60	216,0
70	252,0
80	288,0
90	324,0
100	360,0

Massa e peso

La massa di un qualsiasi corpo materiale dipende dal numero e dal tipo di atomi.
La massa è un dato invariante del sistema e non cambia da un luogo all'altro.
Ad esempio un chiodo di ferro sarà costituito sempre dallo stesso tipo e dallo stesso numero di atomi, sia qui sulla Terra, sia sulla Luna.
Nel Sistema Internazionale, **l'unità di misura della massa è il chilogrammo massa**, che ha simbolo:

$$kg$$

Nota importante.
E' necessario distinguere il concetto di massa dal concetto di peso.
Il **peso**, o meglio, la **forza peso** è una forza e, come tale, **è una grandezza derivata data dalla moltiplicazione di una massa per l'accelerazione gravitazionale che quest'ultima subisce**.

$$peso = forza\ peso = massa\ \cdot accelerazione$$

Questo viene indicato con la simbologia:

$$F_{peso} = m\ \cdot g$$

dove *m* indica la *massa* e *g* l'*accelerazione gravitazionale locale*.
Mediamente, si assume:

$$g = 9{,}816\ \frac{m}{s^2}$$

alla latitudine di 45° e sul livello del mare.

Nella pratica quotidiana, purtroppo, **si confondono abbastanza comunemente i due concetti di massa e di peso**.
Ad esempio: un astronauta i orbita ha una sua massa, ma il *peso apparente* è praticamente zero, poiché galleggia all'interno della sua navicella.

Un altro **esempio**.
Mettiamo una bilancia elettronica sul ripiano di un ascensore fermo e ci saliamo sopra: dopo un po' leggiamo sul display un peso costante, ad esempio di 75,350 chilogrammi.
Questo è *il nostro peso apparente a riposo*.
Se però l'ascensore viene attivato per salire noi (per inerzia) tendiamo a rimanere fermi e ci sentiamo schiacciati sulla bilancia.
Per un certo periodo *il peso registrato dalla bilancia sarebbe superiore ai 75,350 chilogrammi*, per poi ritornare "oscillando" a questo valore quando l'ascensore assume una velocità di salita uniforme.
Infine, quando l'ascensore si ferma in cima alla sua salita, noi continueremmo (per inerzia) a salire (percependo uno strano senso di vuoto allo stomaco) ed *il peso registrato dalla bilancia sarebbe inferiore ai 75,350 chilogrammi*, per poi ritornare "oscillando" a questo valore.
E se, malauguratamente, il cavo dell'ascensore dovesse rompersi, cadremmo alla stessa velocità della bilancia è quindi *il nostro peso apparente sarebbe uguale a zero*: proprio come l'astronauta nella sua navicella.

La densità

La **densità** è una **grandezza fisica derivata** dal **rapporto tra la massa di un corpo materiale ed il volume occupato**.
In un **corpo materiale omogeneo** (ad esempio: senza buchi all'interno) **la densità rimane costante**: per questo si dice anche che **la densità è una grandezza fisica intensiva**.

Il tutto viene espresso mediante la simbologia:

$$densità = \frac{massa}{volume}$$

Nel Sistema Internazionale, **l'unità di misura della densità è di**

$$\frac{1\ chilogrammo\ massa}{1\ metro\ cubo}$$

Esempio 1
Si soglia trasformare nel modo seguente la **densità dell'aria secca**, data da:

$$1{,}293\ \frac{g}{dm^3} = x\ \frac{kg}{m^3}$$

dove il simbolo g indica "*grammi*".
Ricordando che nei volumi si ha $dm^3 = 10^{-3}\ m^3$ e nelle masse $k = 10^3$, si ottiene

$$1{,}293\ \frac{g}{10^{-3} \cdot m^3} = x\ \frac{10^3 \cdot g}{m^3}$$

Si semplificano i termini simili:

$$1{,}293\ \frac{1}{10^{-3}\ \cdot 1} = x\ \frac{10^3 \cdot 1}{1}$$

$$1{,}293 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = x$$

$$1{,}293 \cdot 10^0 = x$$

$$1{,}293 = x$$

Quindi, come risultato finale, scriveremo:

$$1{,}293\ \frac{g}{dm^3} = 1{,}293\ \frac{kg}{m^3}$$

Nota. Non deve assolutamente sorprendere il fatto che il "numero" 1,293 sia rimasto costante.
Infatti abbiamo semplicemente moltiplicato per 1000 sia il numeratore, sia il denominatore della scritta

$$1{,}293\ \frac{g}{dm^3} = 1{,}293\ \frac{1000 \cdot g}{1000 \cdot dm^3} = 1{,}293\ \frac{kg}{m^3}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio 2
Si soglia trasformare nel modo seguente la **densità di un pezzo di legno**, data da:

$$0{,}75\ \frac{kg}{dm^3} = x\ \frac{g}{cm^3}$$

dove il simbolo g indica "*grammi*".
Ricordando che, nei volumi si ha $dm^3 = 10^{-3}\ m^3$, $cm^3 = 10^{-6}\ m^3$ e nelle masse $k = 10^3$, si ottiene:

$$0{,}75\ \frac{10^3 \cdot g}{10^{-3} \cdot m^3} = x\ \frac{g}{10^{-6} \cdot m^3}$$

Si semplificano i termini simili:

$$0{,}75\ \cdot 10^3 \cdot 10^3 = x\ \cdot 10^6$$

$$0{,}75\ \cdot 10^6 = x\ \cdot 10^6$$

$$0{,}75 = x$$

Quindi, come risultato finale, scriveremo:

$$0{,}75\ \frac{kg}{dm^3} = 0{,}75\ \frac{g}{cm^3}$$

Nota. Non deve assolutamente sorprendere il fatto che il "numero" 0,75 sia rimasto costante. Infatti abbiamo semplicemente diviso per 1000 sia il numeratore, sia il denominatore della scritta

$$0{,}75\ \frac{kg}{dm^3} = \ 0{,}75\ \frac{\left(\frac{kg}{1000}\right)}{\left(\frac{dm^3}{1000}\right)} = 0{,}75\ \frac{g}{cm^3}$$

come volevasi dimostrare.