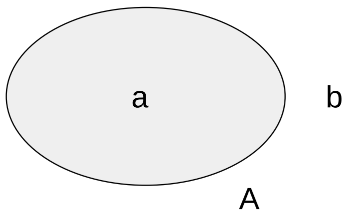
Insiemistica

Se consideriamo un certo numero di persone, cose, animali, piante, minerali, ecc., noi possiamo attribuire loro alcune *caratteristiche*, che definiamo con il termine di *proprietà*.
Le *singole entità* che consideriamo sono dette *elementi*.
Gli elementi che possiedono una certa proprietà sono definiti come *elementi dell'insieme*.
Si dice anche che *gli elementi appartengono all'insieme, definito dalla proprietà data*.
Vale quindi il *concetto di appartenenza*, di *inclusione* (da *in-claudere* = chiudere dentro).
L'*insieme vuoto* (simbolo) *non ha alcun elemento*.
Tutti gli elementi che non possiedono una certa proprietà non appartengono all'insieme, definito dalla proprietà data.
Vale quindi il *concetto di non-appartenenza*, di esclusione (da *ex-claudere* = chiudere fuori).
Non esiste una terza possibilità, come dice un motto latino: "*tertium non datur*".

Il simbolo degli elementi di un insieme va scritto in lettere minuscole (a, b, c, …); quello degli insiemi va scritto in maiuscolo (A, B, C, …).

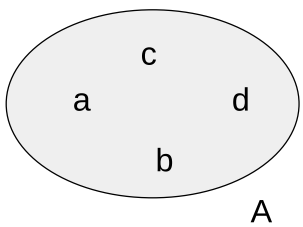


Nell'esempio dato in figura, si ha che:

$$a \in A \quad \text{e} \quad b \notin A$$

che si leggono, rispettivamente: *"l'elemento* a *appartiene all'insieme A"* e *"l'elemento* b *non appartiene all'insieme A"*.

Se più elementi appartengono ad un dato insieme, i singoli elementi vengono scritti racchiusi tra parentesi graffe e separati da una virgola.



Si usa la simbologia:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

che può essere letta in uno dei seguenti modi:

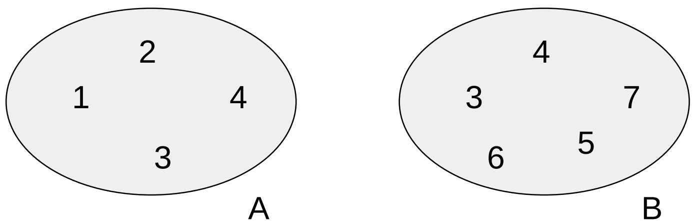
- *"l'insieme A comprende gli elementi a, b, c, d";*
- *"l'insieme A è costituito dagli elementi a, b, c, d";*
- *"gli elementi a, b, c, d appartengono all'insieme A".*

Intersezione tra insiemi

L’intersezione tra due (o più) insiemi è data da un insieme che comprende gli elementi comuni presenti negli insiemi dati in partenza.
Questo significa che gli elementi comuni devono essere contemporaneamente presenti nell’uno e nell’altro insieme (o negli altri insiemi).
Si tratta di un *AND logico*.
Il simbolo dell’intersezione è dato da: ∩.

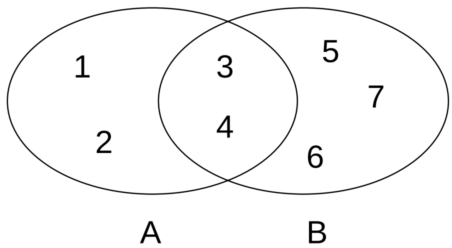
Siano dati gli insiemi

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$



L’insieme derivato dall’intersezione di A con B è dato dall’insieme C:

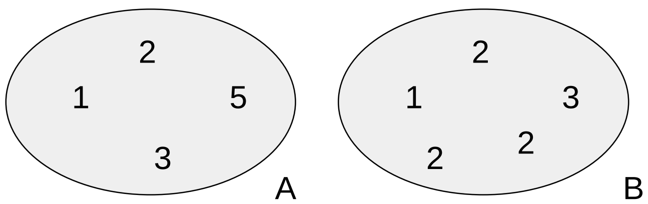
$$C = A \cap B = \{3, 4\}$$



e si può leggere in uno dei due seguenti modi:
- *“A intersecato B è uguale a C”;*
- *“l’insieme intersezione C è dato (costituito) dagli elementi 3 e 4”*.

Esempio di intersezione tra insiemi
Si immagini di avere i Consigli di Amministrazione di due aziende A e B e si voglia convocare, in una riunione, solo i Consiglieri che fanno parte dell’azienda A e dell’azienda B.
Questo insieme intersezione comprenderà esclusivamente i Consiglieri 3 e 4.

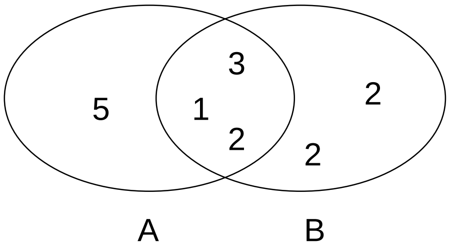
Il massimo comune divisore di due o più numeri
Siano dati i numeri 24 e 30 e si voglia calcolare il loro massimo comune divisore (*MCD*).
Si scompongono i due numeri in fattori primi (compreso “uno”) e si ottengono gli insiemi:



$$A = \{1, 2, 3, 5\} \text{ e } B = \{1, 2, 2, 2, 3\}$$

quindi:

$$MCD_{(24,30)} = C = A \cap B = \{1, 2, 3\}$$



Moltiplicando infatti tra loro gli elementi dell'insieme C, si ottiene:

$$MCD_{(24,30)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Quindi il massimo comune divisore (MCD) di due (o più) numeri è dato dal prodotto dei fattori primi comuni che derivano dalla scomposizione in fattori primi dei due (o più) numeri dati.
Per calcolare il massimo comune divisore si considerano le basi dei fattori comuni, considerate con il minimo esponente:

Osservazioni
Se due numeri sono uno il multiplo dell'altro, il numero più piccolo è il massimo comune divisore:

$$MCD_{(6,12)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

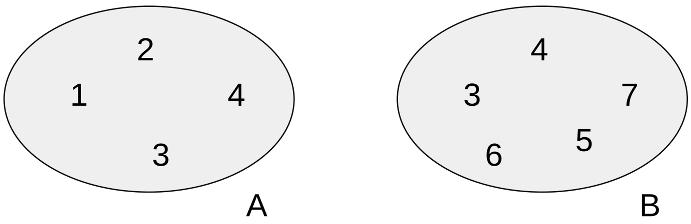
In generale, il massimo comune divisore di due (o più) numeri è minore o tutt'al più uguale al più piccolo dei numeri dati.
Se due o più numeri sono primi tra loro, il massimo comune divisore è "uno".

Unione tra insiemi

L'unione tra insiemi è data da un insieme che comprende tutti gli elementi comuni e non comuni presenti negli insiemi dati in partenza, però gli elementi comuni a tutti gli insiemi vengono considerati una sola volta.
Poiché è sufficiente che gli elementi appartengano o all'uno o all'altro degli insiemi dati, si ricava che l'operazione di unione tra insiemi equivale ad un *OR logico*.
Il simbolo dell'unione è dato da: ∪.

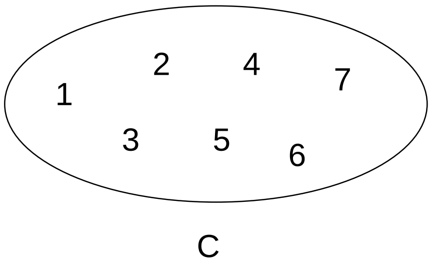
Siano dati gli insiemi

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$



L'insieme derivato dall'unione di A con B è dato dall'insieme C:

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



e si può leggere in uno dei due seguenti modi:

- *"A unito B è uguale a C";*
- *"l'insieme unione C è dato (costituito) dagli elementi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7".*

Si osservi che gli elementi 3 e 4 sono considerati una sola volta.
Quindi:

$$C = A \cup B = A + B - (A \cap B)$$

Esempio (si osservino i grafici soprastanti)
Si immagini di avere i Consigli di Amministrazione di due aziende A e B e si vogliano fondere (unire) le due aziende d'origine in un'unica azienda C. E' evidente che i Consiglieri 3 e 4 non potranno duplicarsi! Ne consegue che, come elementi comuni alle aziende A e B, verranno considerati una sola volta nell'azienda C.

Il minimo comune multiplo di due o più numeri (mcm)
Siano dati i numeri 24 e 30 e si voglia calcolare il loro minimo comune multiplo. Si scompongono i due numeri in fattori primi (compreso "uno") e si ottengono gli insiemi:

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \text{ e } B = \{1, 2, 2, 2, 3\}$$

quindi:

$$mcm_{(24,30)} = C = A \cup B = \{1, 2, 2, 2, 3, 5\}$$

Moltiplicando gli elementi di C, si ottiene:

$$mcm_{(24,30)} = C = A \cup B = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Quindi il minimo comune multiplo è dato dal prodotto dei fattori comuni e non comuni, ma quelli comuni vengono considerati con il massimo esponente.
Nell'esempio, tra 2 e 2^3 , sceglieremo 2^3.

Nota
Il minimo comune multiplo di due o più numeri è uguale al (o maggiore del) più grande dei numeri presi in esame.
Se uno dei numeri è multiplo di tutti gli altri, questo numero sarà il minimo comune multiplo dei numeri considerati.
Se due (o più) numeri sono primi tra loro (hanno solo "uno" come fattore comune) il minimo comune multiplo è dato dal prodotto dei numeri primi considerati.

Osservazione importante: quando parliamo e diciamo cose sbagliate!
Quando due (o più) persone sono d'accordo e condividono pienamente alcuni della loro relazione interpersonale, noi diciamo che "*hanno un minimo comune denominatore*" o che "*hanno un minimo comune multiplo*".In realtà questo modo di dire è sbagliato, secondo la logica matematica. Questo perché la condivisione e la contemporaneità ci dovrebbero far parlare di "***massimo comune divisore***".

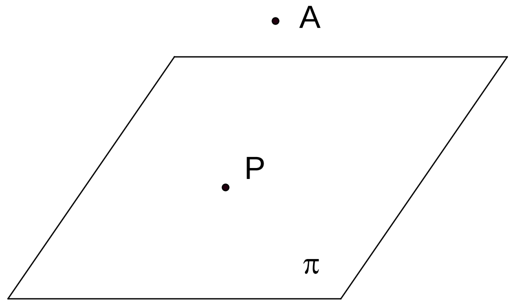
Punti, rette e piani

Il punto P appartiene al piano euclideo π:

$$P \in \pi$$

Il punto A non appartiene al piano euclideo π:

$$A \notin \pi$$



Da questo momento, salvo avviso contrario, con la parola *piano* si intenderà trattare il *piano euclideo*.

L'intersezione tra il piano π ed il punto P, corrisponde allo stesso punto P:

$$\pi \cap P = P$$

L'unione tra il piano π ed il punto P, corrisponde al piano π:

$$\pi \cup P = \pi$$

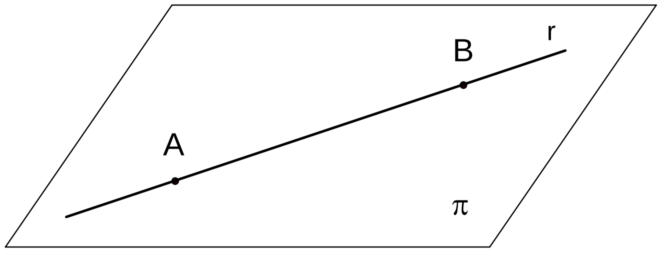
L'intersezione tra il piano π ed il punto A, corrisponde all'insieme vuoto (simbolo $\emptyset$):

$$\pi \cap A = \emptyset$$

Siano dati due punti A e B che appartengono al piano π:

$$(A \wedge B) \in \pi$$

Per i due punti A e B, appartenenti al piano π, passa una ed una sola retta *r*.



La retta *r*, costituita da infiniti punti, appartiene al piano π:

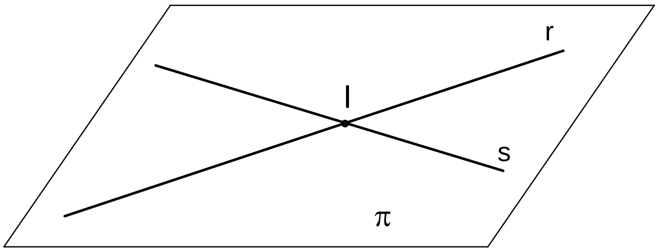
$$r \in \pi$$

Tra tutti gli infiniti punti del piano π, anche A e B appartengono alla retta *r*:

$$(A \wedge B) \in r$$

Siano date due rette *r* ed *s*, non parallele tra loro ed appartenenti al piano π:

$$((r \wedge s) \in \pi) \wedge (r \nparallel s)$$



Le due rette *r* ed *s* si incontreranno (*rette incidenti*) in un punto *I*, detto *punto di intersezione*:

$$r \cap s = I$$

E' evidente che il punto I appartiene ad ognuna delle due rette *r* ed *s*:

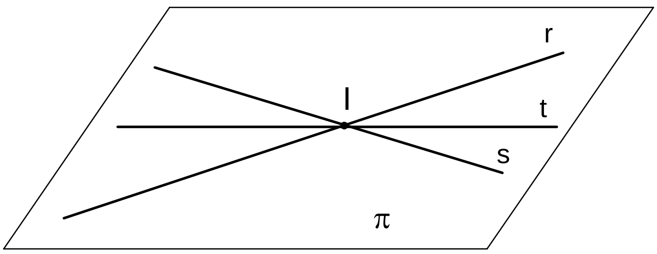
$$(I \in r) \wedge (I \in s)$$

e quindi il punto *I* appartiene al piano π:

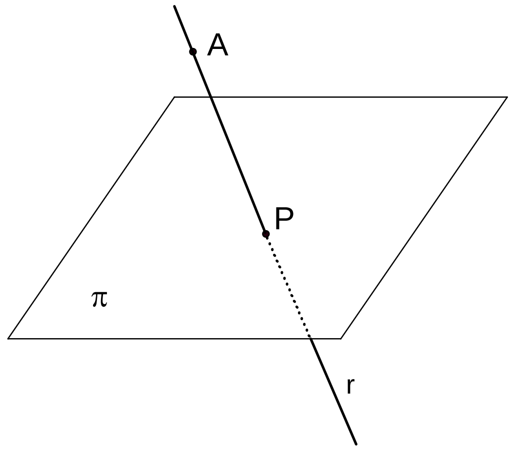
$$I \in \pi$$

Fascio proprio di rette

Due (o più) rette incidenti, che si trovano nello stesso piano π, formano un fascio proprio di rette ed hanno tutte in comune il solo punto *I* di intersezione.



Incidenza tra una retta ed un piano



Siano date le seguenti condizioni, rappresentate in figura:

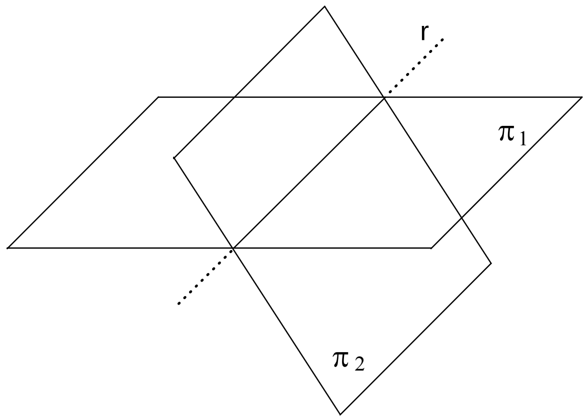
- il punto P che appartiene al piano π:
$$P \in \pi$$
- il punto A che non appartiene al piano π:
$$A \notin \pi$$
- la retta r che passa per i punti A e P:
$$(P \in r) \wedge (A \in r)$$

Si ricava che l'intersezione tra la retta *r* ed il piano π è data da:

$$r \cap \pi = P$$

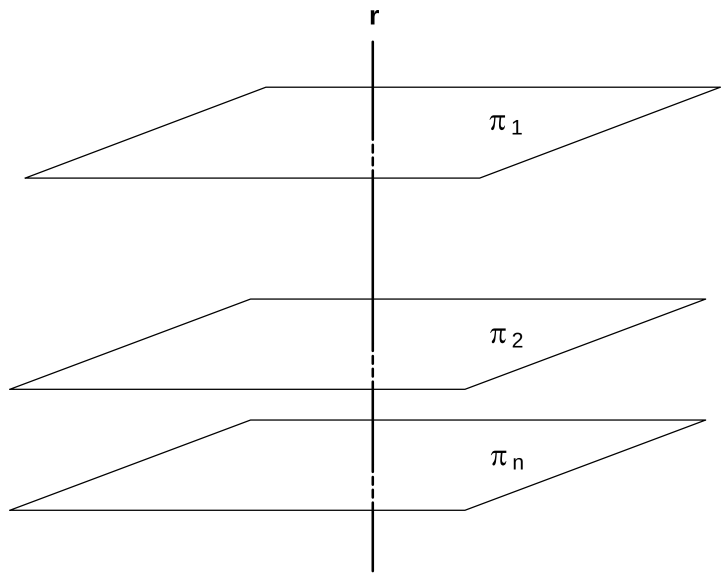
Infatti, il punto P appartiene contemporaneamente al piano π e alla retta *r*.

Fascio proprio di piani (incidenza tra piani)



Siano dati due piani π_1 e π_2, non paralleli tra loro ($\pi_1 \nparallel \pi_2$).
La loro intersezione è data da una retta r, come rappresentato in figura:
Si osservi che:
$$(r \in \pi_1) \wedge (r \in \pi_2)$$
e quindi:
$$\pi_1 \cap \pi_2 = r$$

Fascio improprio di piani (piani paralleli)

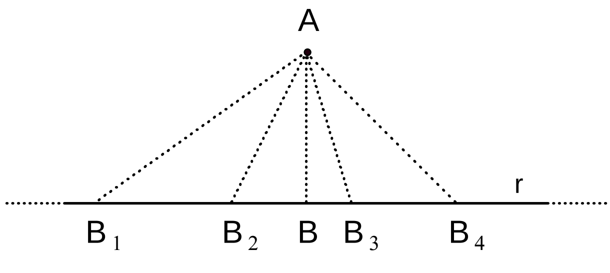


Siano dati i piani π_1, π_2, …, π_n, paralleli tra loro ($\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \cdots \parallel \pi_n$).
La distanza tra un piano ed il piano adiacente è costante.
La loro intersezione è data dall'insieme vuoto.
Si osservi che, se la retta *r* è incidente nel piano π_1, questa retta è incidente (con lo stesso angolo) anche in tutti gli altri piani del fascio improprio al quale appartiene il piano π_1.
Come caso particolare, se la retta *r* è normale (perpendicolare) nel piano π_1, questa retta è perpendicolare anche a tutti gli altri piani del fascio improprio al quale appartiene il piano π_1.

$$\forall(r \perp \pi_1) \Longrightarrow (r \perp \pi_n)$$

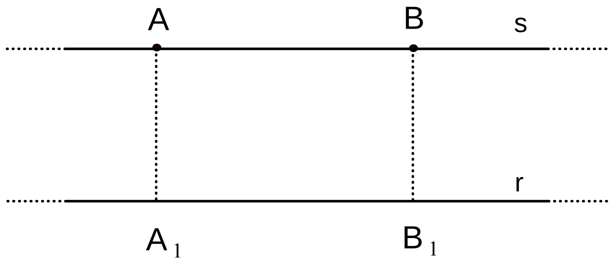
con $n = 1, 2, 3, \ldots$

Distanza di un punto da una retta

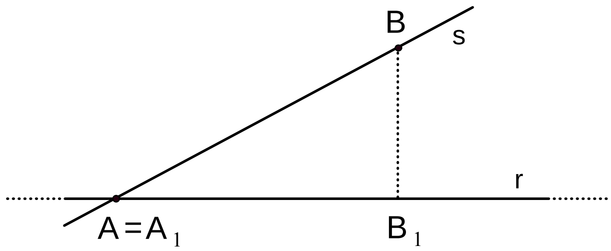


Siano dati una generica retta r ed un punto A esterno ad essa ($A \notin r$).
Si scelgano, sulla retta *r*, dei punti B, B_1, B_2, …, B_n e si considerino le lunghezze dei segmenti $\overline{AB}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, …, $\overline{AB_n}$.
Il segmento che, tra questi, ha la minima lunghezza è detto *distanza del punto A dalla retta r*.
Nell'esempio dato in figura, corrisponde alla *lunghezza del segmento* $\overline{AB}$.
L'estremo B del segmento $\overline{AB}$ viene anche definito *piede della proiezione ortogonale del punto A sulla retta r*.

Proiezione di un segmento $\overline{AB}$ su una retta *r*



Se due rette *r* ed *s* sono parallele tra loro, il segmento $\overline{AB}$ definito sulla retta *s* è congruente con il segmento $\overline{A_1B_1}$ definito sulla retta *r*.



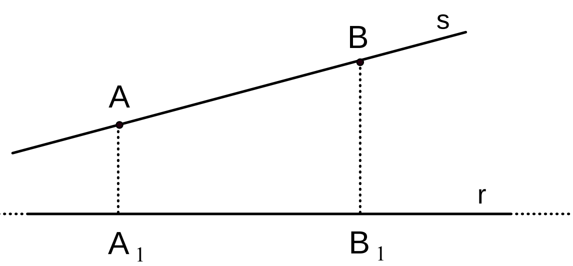
Se due rette *r* ed *s* sono incidenti nel punto $A = A_1$, il segmento $\overline{AB}$ definito sulla retta *s* è maggiore del segmento $\overline{A_1B_1}$ definito sulla retta *r*.
Infatti:

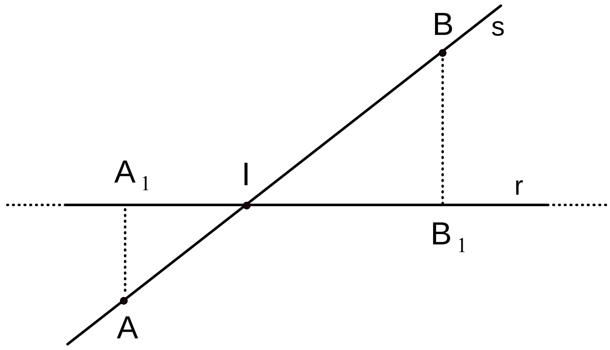
- il triangolo AB_1B è rettangolo in B_1;
- il segmento $\overline{AB}$ definito sulla retta *s* corrisponde all'ipotenusa del triangolo AB_1B;
- il segmento $\overline{A_1B_1}$ definito sulla retta *r* corrisponde ad un cateto.

Per definizione, *qualsiasi cateto ha una lunghezza inferiore all'ipotenusa*.

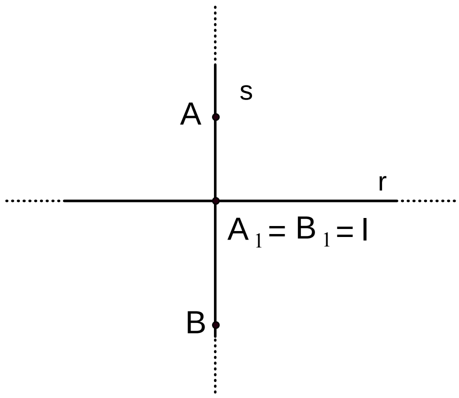
In generale, vale comunque il fatto che, se due rette *r* ed *s* sono incidenti in un punto del piano euclideo, il segmento $\overline{AB}$ definito sulla retta *s* è maggiore del segmento $\overline{A_1B_1}$ definito sulla retta *r*.

$$\overline{AB} > \overline{A_1B_1}$$





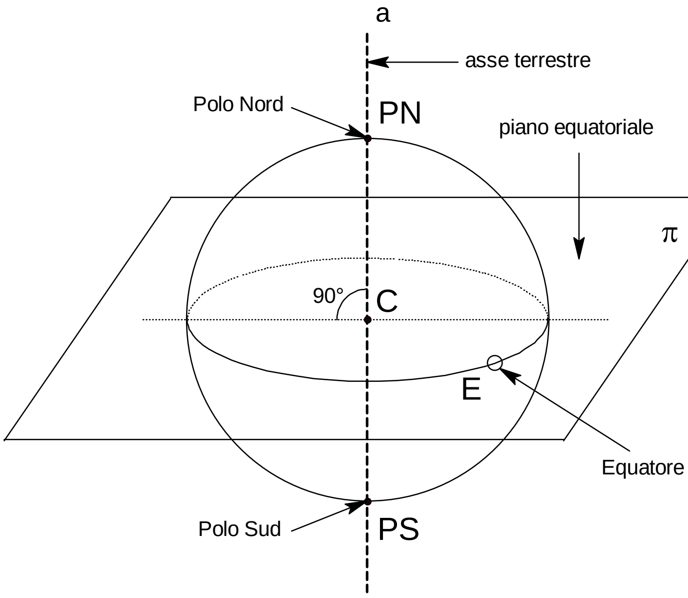
Caso particolare
Se due rette r ed s sono perpendicolari tra loro ed incidenti nel punto $A = A_1 = I$, il segmento $\overline{A_1B_1}$ definito sulla retta *r* ha lunghezza nulla e coincide con il punto *I*.



Elementi notevoli di una Terra sferica ideale

Si immagini di avere a disposizione una Terra sferica e si definiscano i seguenti elementi – base:

- V – volume della Terra;
- S – superficie sferica della Terra;
- C – centro della Terra;
- a – asse geografico terrestre;
- π – piano equatoriale;
- p – parallelo;
- E – equatore terrestre;
- PN – Polo Nord geografico;
- PS – Polo Sud geografico;
- ML – meridiano locale;
- AML – antimeridiano locale.



Il centro della Terra appartiene al piano equatoriale:

$$C \in \pi$$

Il centro della Terra appartiene all'asse geografico terrestre:

$$C \in a$$

L'*asse geografico terrestre* è perpendicolare al piano equatoriale:

$$a \perp \pi$$

Il *centro della Terra* è dato dall'intersezione tra asse geografico terrestre e piano equatoriale:

$$a \cap \pi = C$$

L'*equatore* (circonferenza massima) è dato dall'intersezione tra il piano equatoriale e la superficie terrestre:

$$\pi \cap S = C$$

Il *Polo Nord* ed il *Polo Sud* geografici sono dati dall'intersezione tra l'asse geografico terrestre e la superficie terrestre:

$$a \cap S = (PN \wedge PS)$$

Si consideri un fascio proprio di piani π_1, π_2, …, π_n, in modo tale che la loro intersezione corrisponda all'asse geografico terrestre *a*:

$$\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \ldots \wedge \pi_n = a$$

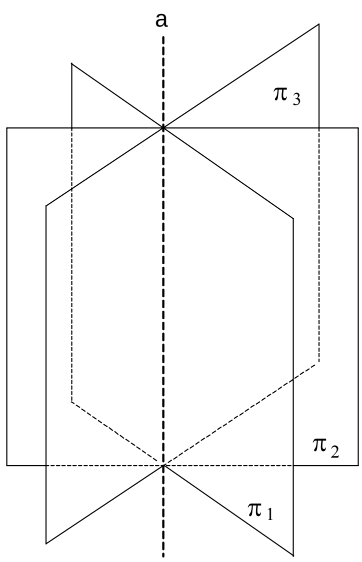
Risulta evidente che ognuno dei piani π_1, π_2, …, π_n:

- contiene il Polo Nord (PN), il centro della Terra (C) ed il Polo Sud (PS):

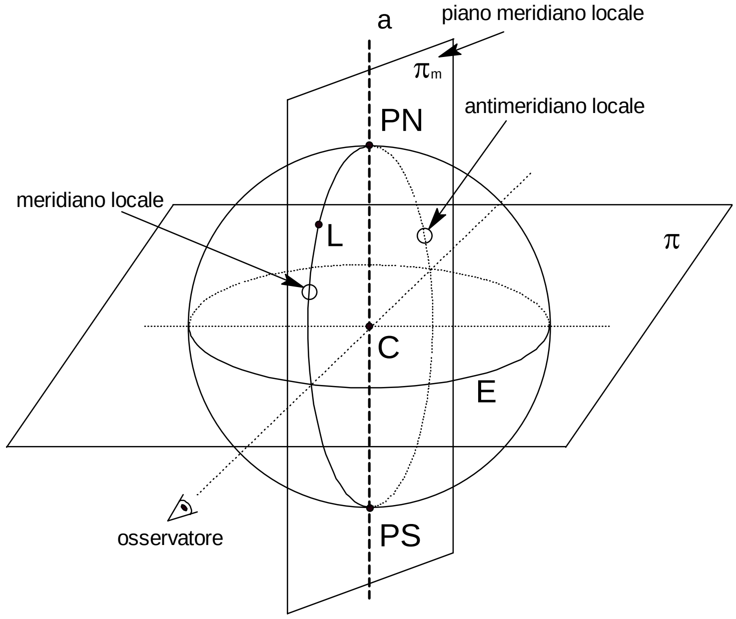
$$(PN \wedge C \wedge PS) \in \pi_n$$

- è perpendicolare al piano equatoriale π:

$$(a \perp \pi_1) \wedge (a \perp \pi_2) \wedge \ldots \wedge (a \perp \pi_n)$$



Ciascuno dei piani π_1, π_2, …, π_n è detto *piano meridiano* e, per rappresentarlo, useremo il simbolo π_m.



Si individui, sulla superficie terrestre, un punto L (località di comodo) in modo che:

$$(L \in \pi_m) \wedge (L \in S)$$

L appartiene quindi al piano meridiano e alla superficie della Terra.

Si noti che il Polo Nord (PN), la località di comodo (L) ed il Polo Sud (PS) sono tre punti non allineati che, necessariamente, si trovano nello stesso *piano meridiano locale* (π_m). Infatti la Geometria Euclidea ci dice che "*per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano*".

La *semicirconferenza* che passa per il Polo Nord (PN), la località di comodo (L) ed il Polo Sud (PS) è detta *meridiano locale* (ML).
L'intersezione tra il piano meridiano (π_m) e la superficie terrestre (S) è data da una circonferenza (*circolo massimo*) che passa per i due poli ed è costituita dall'unione del *meridiano locale* (ML) e dell'*antimeridiano locale* (AML). Si ricordi che, nella realtà, questo circolo massimo è schiacciato ai poli ed espanso all'equatore.

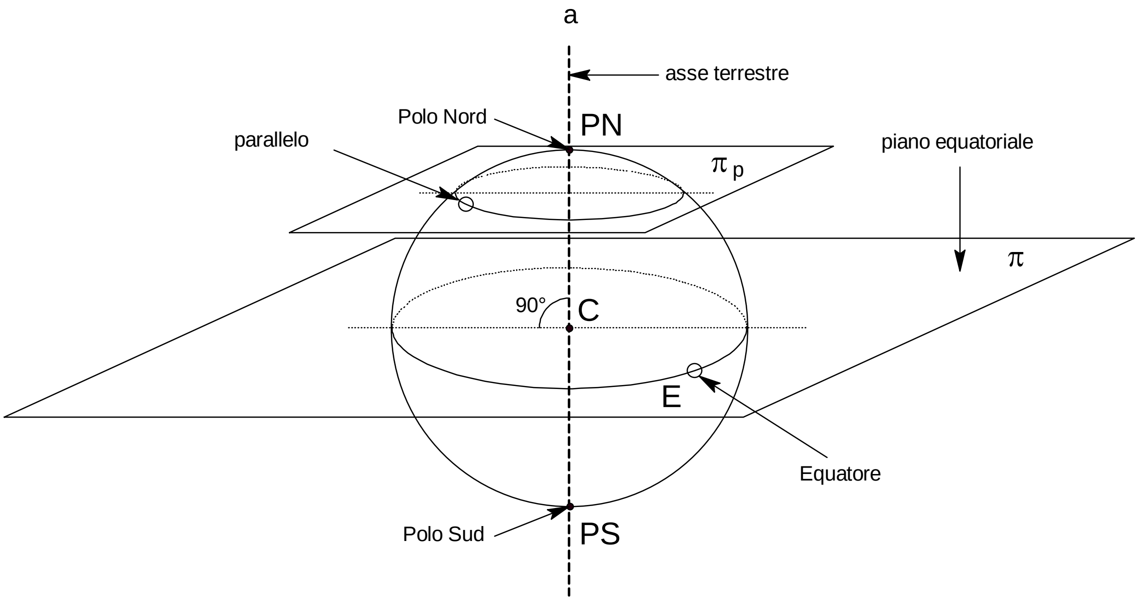
Siano dati n piani paralleli $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, paralleli tra loro e al piano equatoriale π ($\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \cdots \parallel \pi_n \parallel \pi$).
Si ricava facilmente che ogni piano $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, è perpendicolare all'asse terrestre geografico:

$$(a \perp \pi_1) \wedge (a \perp \pi_2) \wedge \ldots \wedge (a \perp \pi_n)$$

Ognuno di questi piani, quando interseca la superficie S della Terra, genera una circonferenza detta *parallelo*:

$$(S \perp \pi_n) = p_n$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$
Se il piano π_n è tangente alla superficie terrestre, l'intersezione è data o dal Polo Nord o dal Polo Sud.

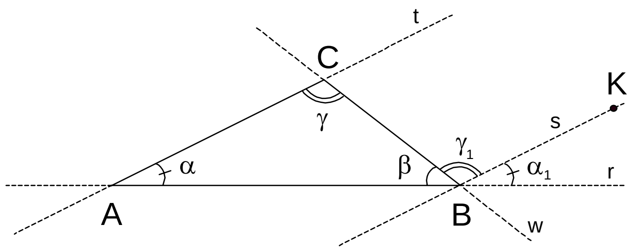

a
asse terrestre
Polo Nord
PN
parallelo
piano equatoriale
π p
π
90°
C
E
Equatore
Polo Sud
PS

Superfici e geodetiche

Una linea geodetica congiunge tra loro due punti di una superficie, seguendo la via più breve. E' necessario ricordare però che, durante il movimento, si deve sempre e comunque aderire alla superficie, senza perforarla "a galleria" (nelle zone convesse) o senza staccarsene come se si stesse volando sopra una vallata (nelle zone concave).

Superfici e geodetiche nel piano euclideo
Nel piano euclideo della Geometria classica, la linea geodetica che congiunge tra loro due punti per la via più breve è una linea retta e questa è unica. Si ricordi infatti che "*per due punti passa una ed una sola retta*".
La *distanza tra i due punti A e B* è detta *segmento di lunghezza* $\overline{AB}$.

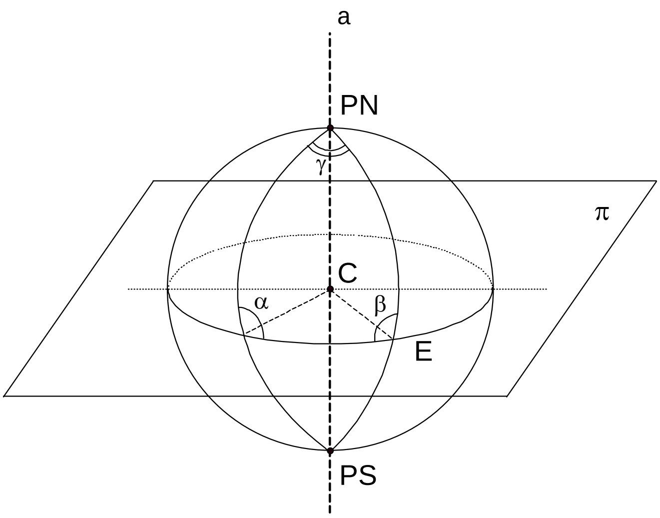
Nel piano euclideo della Geometrica classica, "la somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è uguale a 180° (angolo piatto)".



Dimostrazione che $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Si traccino:
- la retta *r*, su cui giace il lato AB; il segmento $\overline{AB} \in r$;
- la retta t, su cui giace il lato AB; il segmento $\overline{AC} \in t$;
- la retta *s*, parallela alla retta *t*, passante per il vertice B; $(s \parallel t) \wedge (B \in s)$.

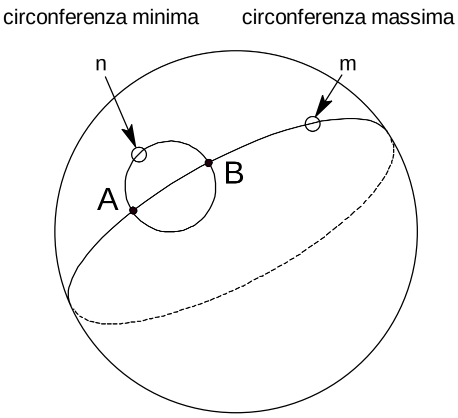
Si considerino le rette parallele s e t, tagliate dalla trasversale r.
"Due rette parallele, tagliate da una trasversale, formano angoli corrispondenti uguali".
Conseguenza: l'angolo α generato dalle rette *t* ed *r*, con vertice in A, ha la stessa ampiezza dell'angolo α_1, generato dalle rette *s* e *t*, con vertice in B.
"Due rette parallele, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni interni uguali".
Conseguenza: l'angolo γ (A$\hat{C}$B), con vertice in C, generato dalle parallele *t* ed *s*, tagliate dalla trasversale *w*, è alterno interno (e quindi uguale) all'angolo γ_1 (C$\hat{B}$K), generato sempre dalle rette parallele *t* ed *s*, tagliate dalla trasversale *w*.

Superficie convessa (es.: superficie sferica)
Un interessante tipo di superficie convessa è quello della sfera, applicabile con buona approssimazione alla Terra.
Si sa che, per definizione dei rapporti geometrici, *ogni meridiano è localmente perpendicolare all'equatore e a tutti gli altri paralleli* ($\alpha = \beta = 90°$).
Inoltre i meridiani si incontrano tutti al Polo Nord e al Polo Sud.
I due piani meridiani, su cui giacciono due meridiani scelti a piacere, formano tra loro un angolo diedro di ampiezza γ, con $\gamma > 0°$.
Risulta quindi che, su una superficie sferica: $\alpha + \beta + \gamma > 180°$.
Conclusione: su una superficie convessa (ad es. sferica) *la somma degli angoli interni di un triangolo convesso è sempre maggiore di 180°.*

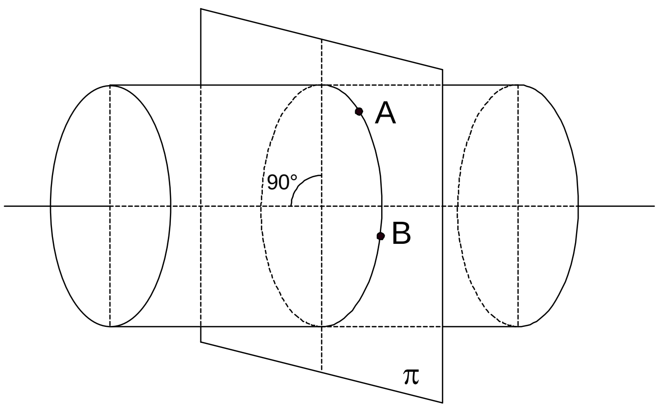


Se si considerano due punti su una superficie sferica, per questi due punti si possono far passare una *circonferenza massima* (*m*) ed una *circonferenza minima* (*n*).
Risulta quindi che *la geodetica tra i due punti A e B individua un arco di circonferenza massima*. Inoltre si ha che:

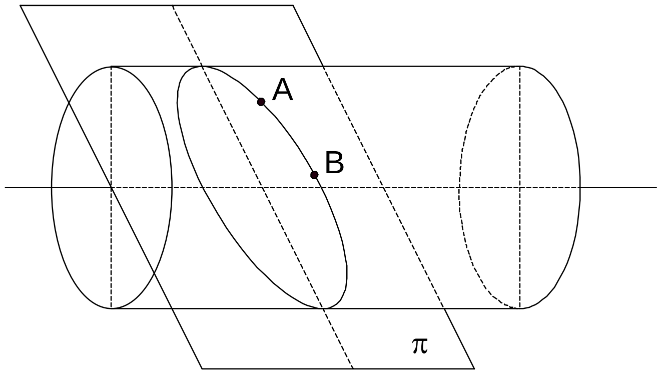
$$m \cap n = \{A, B\}$$



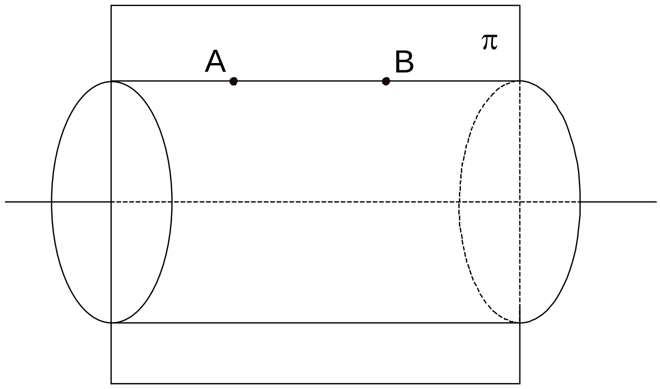
Su una **superficie cilindrica**, tagliata da un piano π, la geodetica è data da un *arco di circonferenza*, se i due punti sono su un piano π perpendicolare all'altezza del cilindro.

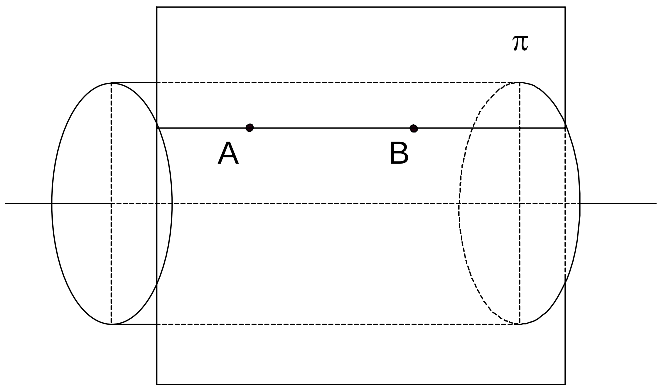


Su una **superficie cilindrica**, tagliata da un piano π, la geodetica è data da un *arco di ellisse* se i due punti sono su un piano π non perpendicolare o non parallelo all'altezza del cilindro.



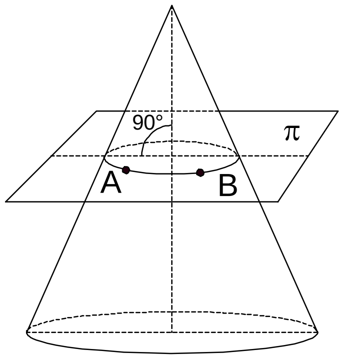
Nel caso in cui i due punti siano su un piano π parallelo all'altezza (o che contiene l'altezza) del cilindro, la geodetica è data da un *segmento di retta*.



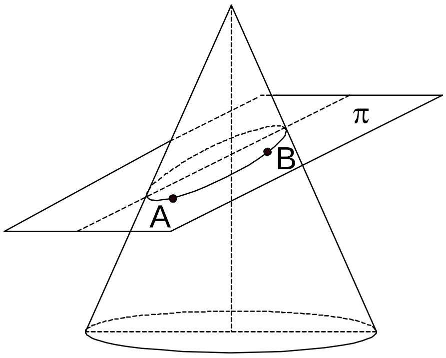


Superficie conica

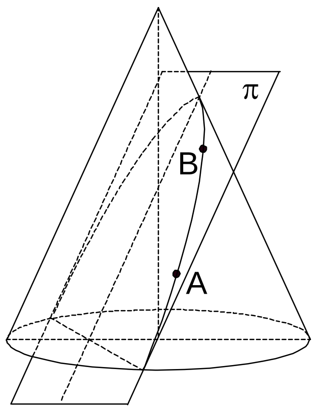
Su una superficie conica, tagliata da un piano π, la geodetica tra due punti A e B del piano π è data da un *arco di circonferenza*, se il piano π è perpendicolare all'altezza del cono.



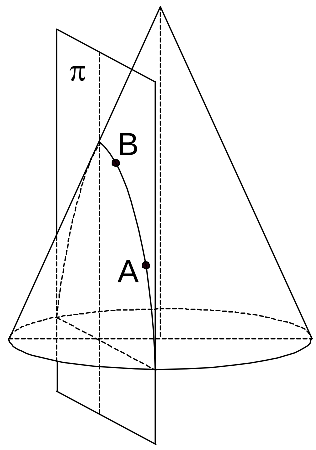
Su una superficie conica, tagliata da un piano π, la geodetica tra due punti A e B del piano π è data da un *arco di ellisse*, se il piano π è inclinato, ma la sua inclinazione va dalla perpendicolarità con l'altezza (esclusa) alla condizione di parallelismo con l'apotema del cono (esclusa).



Su una superficie conica, tagliata da un piano π, la geodetica tra due punti A e B del piano π è data da un *arco di parabola*, se il piano π è parallelo all'apotema del cono.

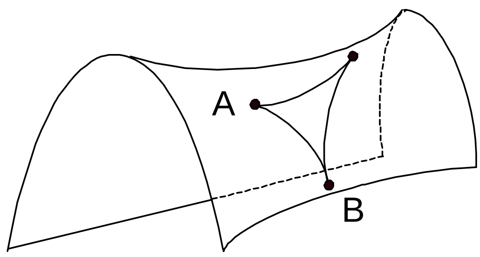


Su una superficie conica, tagliata da un piano π, la geodetica tra due punti A e B del piano π è data da un *arco di iperbole*, se il piano π è più inclinato dell'apotema del cono.
Al limite, la geodetica tra due punti A e B del piano π è data da un *arco di iperbole equilatera*, se il piano π è parallelo dell'altezza del cono.



Superficie concava
Nel caso di una superficie concava (ad esempio, una struttura "***a sella di cavallo***"), *la somma degli angoli interni di un triangolo concavo è sempre inferiore a 180°*:

$$\alpha + \beta + \gamma < 180°$$



Conclusione.
Nella realtà che ci circonda è molto difficile trovare dei piani euclidei o delle superfici sferiche, cilindriche o coniche: è facilissimo trovare invece delle superfici concave o convesse, con raggi di curvatura variabili. E' chiaro che *la Geometria classica di Euclide è applicabile solo ad una delle infinite possibilità che troviamo in natura*.
Un esempio particolare di geodetica, applicata alla superficie terrestre, è quello che riguarda il ***profilo topografico di rilievi emersi o sommersi***: tale profilo è generato dall'intersezione tra un piano verticale e la superficie topografica locale.